ISSN 0130-2221
НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ
2000 · №6

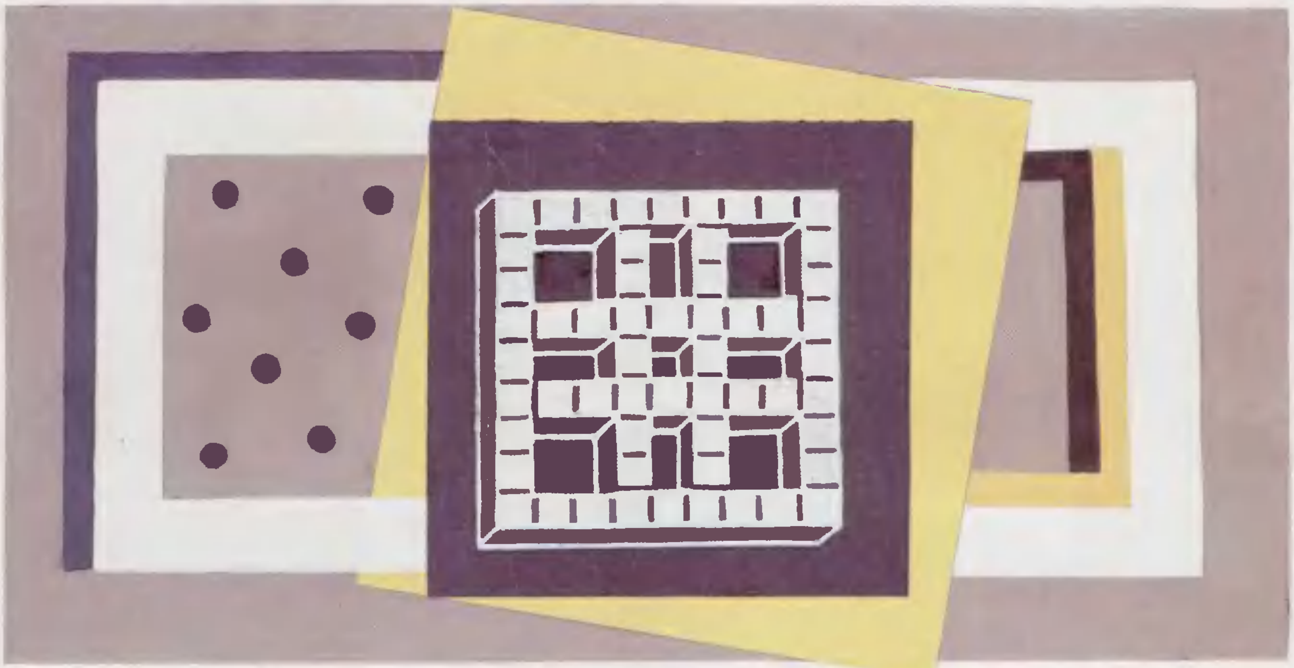
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Узор из домино

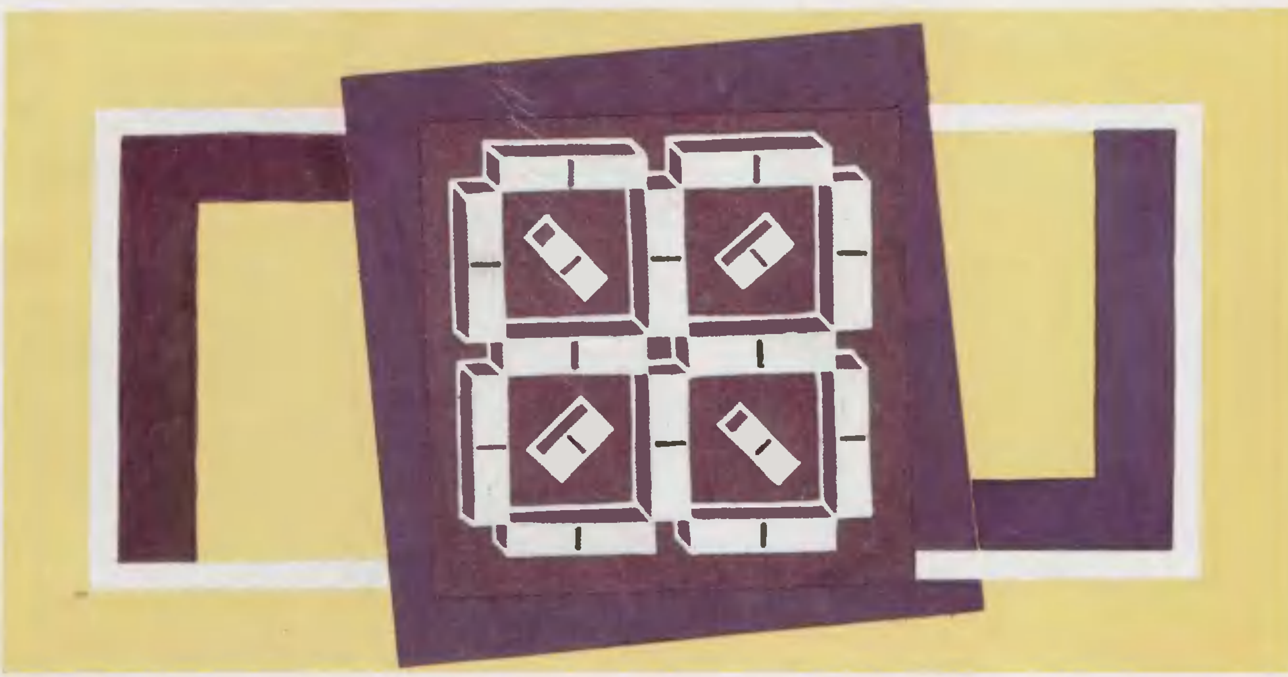
Уложите 28 косточек домино в виде узора, изображенного на рисунке, так, чтобы суммы очков вдоль всех прямых были равны. При этом в тех местах, где кости соприкасаются торцами (таких мест 12), на них должны быть одинаковые "цифры".



Коврик из домино

Уложите все 28 косточек домино в виде коврика так, чтобы сумма очков вдоль каждой прямой (без разрывов) была равна 25. Косточки не обязательно прикладывать друг к другу по правилам игры домино.

Л.Мочалов



КВАНТ НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2000 № 6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум

В номере:

Иллюстрация В.Власова

Кеплер и винные бочки – австрийские и рейнские

А.СПИВАК, В.ТИХОМИРОВ

По обычаю да и просто по совести журнал, если на его страницах появилась ошибка, обязан безотлагательно ее исправить. Так вот, в восьмом номере «Кванта» за 1986 год была опубликована статья «Секрет Старого Бондаря», основной результат которой неверен. А обнаружилось это только сейчас, 14 лет спустя!

Публикация ошибочной статьи – происшествие для нашего журнала чрезвычайно редкое. Интересно выяснить, как это произошло. И почему ошибку обнаружили не сразу? Да, собственно, о чем речь?

Речь пойдет, в сущности, о книге Иоганна Кеплера (1571–1630) «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки, с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии». В этой книге рассмотрены не только винные бочки, но и многие другие тела – айва, лимоны, яблоки, оливки, груши, тыквы, веретена, опухоли, обравненные кучи зерен, венки сельских девушек, прорезающиеся рога,... Например, *лимон* по Кеплеру – это тело, полученное вращением меньшей части круга, отсеченной хордой, вокруг этой хорды (рис.1). *Яблоко*,

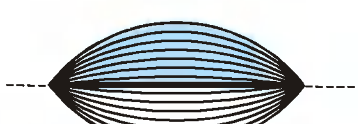


Рис.1

Иллюстрация В.Власова

как вы, наверное, догадались, образуется при вращении большей части круга (рис.2). (Заметьте: шар – это и яблоко, и лимон одновременно!) Кеплер рассматривает и *эллиптическую сливу*, полученную вращением эллипса вокруг его большой оси (рис.3), и *пояс яблока*, полученный вырезанием из яблока его сердцевины, т.е. цилиндра, ось которого

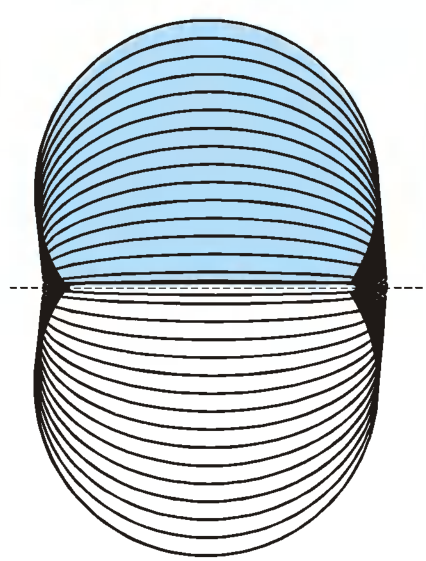


Рис.2

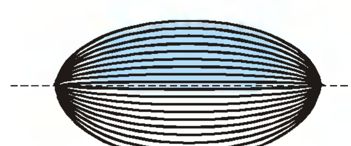


Рис.3

совпадает с осью вращения (рис.4), и многие другие тела вращения.

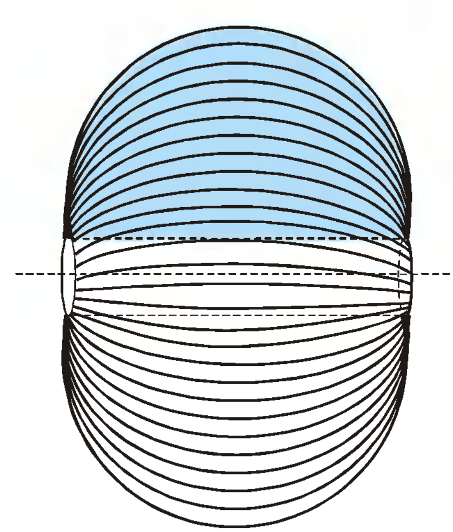


Рис.4

Не стоит удивляться терминам «лимон», «яблоко», «слива». Они естественны для Кеплера, который обладал живостью ума и языка.[1] Удивительно другое: сколь многим математика обязана винным бочкам, подвигшим Кеплера вычислять объемы и площади поверхностей тел вращения, а также решать задачи на максимум и минимум. О нескольких таких задачах, в частности о той, которой была посвящена статья «Секрет Старого Бондаря», рассказано в этой статье.[2] Некоторые другие – те, что привели к замечательным формулам, известным ныне как формулы Гюльдена,– мы обсудим в одном из ближайших номеров журнала.

Вступление

Я небеса измерял;
ныне тени земли измеряю.
Дух на небе мой жил;
здесь же тень тела лежит.

Неизвестно, была ли написана на могильной плите Кеплера эта сочиненная им самим эпитафия.[3] Неиз-

[1] *Да и откуда ему было знать, какие термины приживутся, а какие нет? Вы можете объяснить, например, почему слова «корень» и «дерево» стали терминами, а слово «лимон» – не стало?*

[2] *А также о реактивных самолетах, о временах года, о связи винных бочек с астрономией. Главное – не торопитесь заглядывать в конец: лучше не перепрыгивать через страницы и века, а мудро пройти весь путь.*

[3] *Могила – а Кеплер умер в Регенсбурге (Германия) – не сохранилась.*

вестно и то, так ли все было в действительности, как он рассказал в предисловии к «Новой стереометрии...». Но история настолько хороша, что ее с удовольствием пересказывают, приукрашивая или сокращая, очень многие историки. Не откажем и мы себе в удовольствии услышать ее из уст автора.

«В ноябре прошлого года,... государи мои милостивые, я ввел в свой дом новую супругу в то время, когда Австрия, закончив обильный сбор благородного винограда, распределяла свои богатства, разослав вверх по Дунаю нагруженные баржи, в нашем Норике и весь берег в Линце был завален винными бочками, продающимися по сходной цене. Согласно обязанностям супруга и доброго отца семейства, мне пришлось позаботиться о необходимом для дома напитке. Поэтому ко мне на дом было принесено и поставлено несколько бочек, а через четыре дня пришел продавец с измерительной линейкой, с помощью которой и промерил подряд все кадки, без различия, не обращая внимания на форму, без всяких соображений и вычислений.»

Продавец измерял расстояние d от наливного отверстия до нижней точки днища (рис.5) и «объявлял количество амфор, вмещаемых бочкой, заметив число, поставленное на ли-

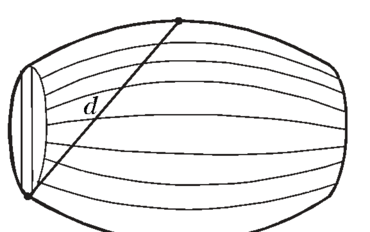


Рис.5

нейке в том месте, на котором оканчивалась названная длина...».

Кеплер удивился, как с помощью одного измерения можно узнать вместимость – ведь бочки бывают разной формы! Он вспомнил «нудное измерение, применяемое на Рейне, где либо, не боясь скучной потери времени, наполняют бочки, отсчитывая количество амфор, и выжигают на измеренном сосуде его вместимость, либо если и пользуются измерительной линейкой, то вымеряют как можно больше поперечных кругов и длину изогнутых клепок[4] и перемножают их между собой, а кроме того, принимают меры предосторожности, касающиеся неравенства между днищами, величины пуза и кривизны клепок, и все-таки не вполне всех удовлетворяют: так, одни указывают одни ошибки, а другие – другие».

Далее Кеплер пишет: «Когда же я узнал, что такое употребление поперечной линейки установлено здесь общественными властями и измерители ручаются за его правильность, то я, как новобрачный, счел для себя подходящим взять новый предмет математических занятий и исследовать геометрические законы такого удобного и крайне необходимого в домашнем хозяйстве измерения и выяснить его основания, если таковые имеются».

Что такое бочка?

В каждый данный момент существует лишь тонкий слой между «тривиальным» и недоступным. В этом слое и делаются математические открытия. Заказная прикладная задача поэтому в большинстве случаев или решается тривиально, или вообще не решается...

А.Н.Колмогоров

Поставленную перед собой задачу новобрачный решал примерно три дня, после чего «очинил перо для отделки и записи доказательства, готового в уме...». Он не ограничился решением задачи, а начал издалека.

«Всякое искусное и удобное измерение объема требует известной правильности фигуры, ибо объемы сосудов, не имеющих никакой определенной правильной формы, не поддаются соображению и требуют только рук и подсчета влитой жидкости.»

К тому же «... жидкость, долго хранимая в металлических сосудах, портится от ржавчины; стеклянные и глиняные не достаточны по размерам и ненадежны; каменные не подходят для употребления из-за веса,– значит, остается ... хранить вина в деревянных. Из одного целого ствола опять-таки нельзя приготовить сосудов достаточно вместительных и в нужном количестве, да если и можно, то они трескаются. Поэтому бочки следует строить из многих соединенных друг с другом кусков дерева. Избегнуть же вытекания жидкости через щели между отдельными кусками нельзя ни при помощи какого-нибудь материала, ни каким-нибудь другим способом, кроме сжимания их связками. Так как эти связки делаются из гибкого материала – березы, дуба и т.п., то под давлением тяжести жидкого вещества, которое ими с силой сжимается, они раздаются по самому вместительному ободу. По этому основному соображению бочары и прибегают к круглым днищам, чтобы, давая на краях иную фигуру, не сделать сосуд перекошенным и непрочным, так как пузо бочки, по сказанному, стремится к круговой форме. Это можно видеть на флягах, в которых через Альпы переносят в Германию итальянские вина. По условиям их употребления они имеют сжатую форму, чтобы их можно было вешать на бока мулов и безопасно переносить через узкие проходы... и вот с той самой стороны, где они более плоски, они хуже выдерживают напор и легче трескаются.

Круговая или цилиндрическая фигура прибавляет еще то удобство, что при перевозке вин на телегах по земле главный вес приходится на вино и наименьший на дерево. На этом основании, если бы из деревянных дощечек можно было сколотить шар, то шарообразные сосуды были бы самыми желательными.[5] Но так как связками доски в шар сжать нельзя, то его место и заступает цилиндр. Но этот цилиндр не может быть вполне правильным, потому что ослабшие связки тотчас же сделались бы бесполезными и не могли бы быть натянуты сильнее, если бы бочка не имела конической фигуры, несколько суживающейся в обе стороны от пуза ее. Эта форма удобна и

[4] *Клепки – это доски, составляющие боковую поверхность бочки.*

[5] *Кеплер, вероятно, имеет в виду то, что из всех тел с данной площадью поверхности наибольший объем имеет шар (так же, как среди фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг). Подробнее об этом можно прочитать в книге В. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып. 56), в статьях В. Трофимова «Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки» («Квант» №5 за 1985 г.) и И.Шарыгина «Миф о Дидоне и изопериметрическая задача» («Квант» №1 за 1997 г.), а также в книге Р.Куранта и Г.Роббинса «Что такое математика».*

[6] *Кеплер прав: слово цилиндр произошло от латинского слова cylindrus, которое в свою очередь произошло от греческого κυλινδρος – валик, каток.*

для качения (отсюда и название цилиндра[6]) и для перевозки на телегах, и ... является ... красивой на взгляд».

В другом месте читаем: «... бочка имеет форму пузатого цилиндра, или, говоря точнее, бочка представляется как бы разделенной на два усеченных конуса, вершины которых, направленные в противоположные стороны, отсечены деревянными днищами бочки, а основание общее, разделяющее конусы и образующее наибольший круг, опоясывающий бочки». Это значит, что Кеплер предлагает такую математическую модель винной бочки: две одинаковые половины, полученные вращением рав-

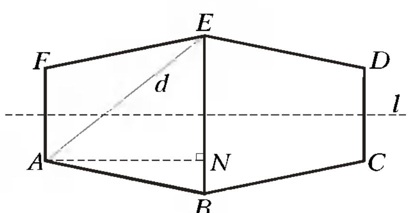


Рис.6

нобоких трапеций $ABEF$ и $BCDE$ вокруг их общей оси симметрии l (рис.6). Продавец мерной линейкой измеряет расстояние $d = AE$.

Кубическая шкала

На линейке, которой пользовался продавец вина, пометки были проставлены не так, как на обычной, а по «кубическому закону» (рис.7). Идея очень проста: при увеличении линейных размеров в k раз объем увеличивается в k^3 раз. (В самом

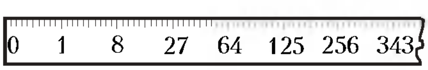


Рис.7

деле, в k раз увеличиваются и длина, и ширина, и высота.)[7]

Но как австрийские бочары умудрялись делать бочки абсолютно одинаковой формы (но разного размера)? Можно вообразить, что существовал какой-то австрийский стандарт. Однако кто, как и зачем его изобрел? Этот вопрос весьма интересен, и Кеплер нашел ответ. Но в двух словах тут ничего толком объяснить нельзя. Поэтому мы не будем торопиться и пока скажем лишь, что австрийская бочка – самая вместительная (при фиксированном d) из всех цилиндрических бочек. Это еще не полный ответ (непонятно, почему мерная линейка годится и для бочек, которые чуть шире или чуть уже стандартных), но это уже кое-что!

Австрийская бочка

Непузатые цилиндрические бочки более удлиненной или более укороченной формы, чем австрийские, вместительны менее последних.

И. Кеплер

Теорема V второй части «Новой стереометрии...» утверждает, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольший объем имеет тот, высота h которого в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса r основания этого цилиндра. Мы не будем пересказывать здесь рассуждение Кеплера, который не владел лишь нарождавшейся в его время алгеброй и потому не использовал никаких формул (кроме многочисленных пропорций), а применим для доказательства современные обозначения и алгебраические методы.

Обозначим диаметр шара буквой d (рис.8). По теореме Пифагора, $d^2 = h^2 + (2r)^2$. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V = \pi r^2 h = \pi \frac{d^2 - h^2}{4} h = \frac{\pi}{4} d^3 \left(1 - x^2\right) x,$$

где использовано обозначение $x = h/d$. Таким образом, мы должны

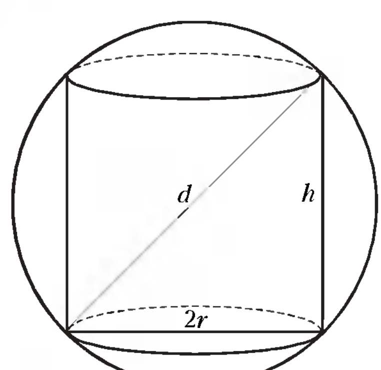


Рис.8

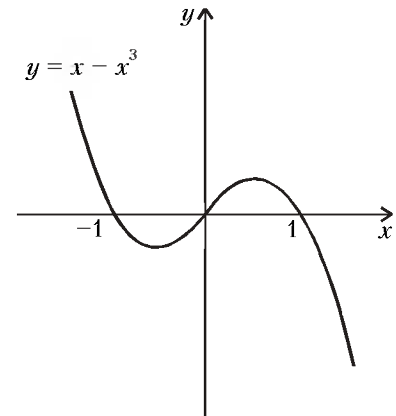


Рис.9

найти максимальное значение функции $y = x - x^3$ на интервале $(0;\ 1)$. График этой функции (даже на большей области определения) изображен на рисунке 9.

Проще всего найти точку максимума тому, кто умеет вычислять производные (и знает, что для нахождения максимума надо выбрать наибольшее из значений в тех точках, где производная равна нулю или не существует, а также в концах отрезка):

$$y' = 1 - 3x^2,$$

производная равна нулю при $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Внутри отрезка $[0;\ 1]$ производная равна нулю лишь при $x = 1/\sqrt{3}$; на концах функция равна нулю. Поэтому наибольшее значение функция принимает при $x = 1/\sqrt{3}$ (при этом, заметьте, $h = d/\sqrt{3}$ и $r = \sqrt{\left(d^2 - h^2\right)/4} = d/\sqrt{6}$, так что $h/r = \sqrt{2}$), а максимальное значение объема цилиндрической бочки равно

$$2V = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} d^3.$$

Можно обойтись и без производных. Например, выполнить замену переменной $x = \frac{1}{\sqrt{3}} + t$. Тогда $t \in \left[-1/\sqrt{3};\ 1 - 1/\sqrt{3}\right]$ и

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} + t - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + t\right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} - t^2\sqrt{3} - t^3.$$

При $t > 0$ имеем $y < 2/\left(3\sqrt{3}\right)$. При $t \in \left[-1/\sqrt{3};\ 0\right)$, очевидно, $-t^2\sqrt{3} - t^3 = -t^2\left(\sqrt{3} + t\right) < 0$, так что нера-

---

7 *Прочитав рукопись этой статьи, В.В.Произволов вспомнил, как однажды в редакцию журнала «Доклады Академии наук» один биолог принес статью, где опытным путем доказывал обнаруженный им закон: объем инфузории пропорционален третьей степени ее длины. Больших трудов стоило убедить этого биолога, что «его» закон верен не только для инфузорий, а для проверки не нужны эксперименты на мухах, крысах, обезьянах, медведях, слонах и китах.*

венство $y < 2/(3\sqrt{3})$ выполнено и в этом случае. Как видите, доказательство не очень сложное, но весьма искусственное – непонятно, как мы догадались до замены переменной. (А догадались мы очень просто – приравняли нулю производную!)

Третий, не менее искусственный, способ – воспользоваться неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.[8] Как известно, если a, b, c – неотрицательные числа, то

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}.$$

Запишем это неравенство в виде

$$abc \le (a+b+c)^3/27$$

и положим $a = 2x$, $b = (1-x)(\sqrt{3}+1)$ и $c = (1+x)(\sqrt{3}-1)$. Тогда $a+b+c = 2\sqrt{3}$, и неравенство принимает вид

$$2x(1-x)(\sqrt{3}+1)(1+x)(\sqrt{3}-1) \le 8/(3\sqrt{3}),$$

откуда

$$x - x^3 \le 2/(3\sqrt{3}).$$

Четвертый способ, надеемся, понравится вам больше. В любой цилиндр можно вписать прямоугольный параллелепипед (рис.10), основание которого – квадрат со стороной длины $r\sqrt{2}$, а высота совпадает с высотой цилиндра. Объем такого параллелепипеда («столба», как его

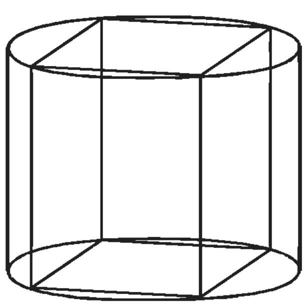


Рис.10

называет Кеплер) равен $2r^2h$, а объем цилиндра, как мы уже говорили,– $\pi r^2 h$. Таким образом, отношение объемов цилиндра и параллелепипеда равно $\pi/2$ и не зависит ни от r, ни от h. Значит, вместо цилиндра можно искать (вписанный в сферу диаметра d) прямоугольный параллелепипед максимального объема!

А теперь – слово Кеплеру: «Теорема IV. Из всех прямоугольных параллелепипедов ... с ... квадратными основаниями, вписанных в одну и ту же сферу, куб имеет наибольший объем». Кеплер, как вы уже знаете, не пользовался алгеброй, отчего его рассуждение растянулось на несколько страниц. Но мы-то с вами знаем неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3,$$

а также неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном[9]

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Если a, b, c – длины ребер прямоугольного параллелепипеда (заметьте – мы даже не требуем, чтобы основание было квадратом), вписанного в шар диаметра d, то

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

и, в силу выписанных выше неравенств,

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \le \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^3 = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Величина $(d/\sqrt{3})^3$ – в точности объем куба, вписанного в сферу диаметра d.

Слава австрийским бочарам!

Как мы уже говорили, Кеплер рассуждал иначе, без алгебры. Но ответ у него получился тот же, что и у нас. И когда он получил ответ, то не смог сдержать своего восхищения австрийскими бочарами, которые «как бы по здравому и геометрическому смыслу при построении бочки соблюдают правило, чтобы за радиус днища брать треть длины клепок. Именно, при таком устройстве цилиндр, мысленно построенный между двумя днищами, будет иметь две половины, весьма близко подходящие к условиям теоремы V, и потому будет самым вместительным, хотя бы при постройке бочки от точных правил несколько и отступили, потому что ... по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно... Бочары за длину клепки берут... полуторную величину диаметра основания, что ... дает... приближение к наивместительнейшей фигуре, потому что клепки изгибаются и с обеих сторон выходят за обручи, которые охватывают и сжимают днища, так что излишек в длине против полуторного диаметра основания и приходится на эти выступающие оконечности, которые не принимались во внимание по правилу теоремы V».

Скептик скажет, что для обоснования приближения $\sqrt{2} \approx 3/2$ столь глубокомысленные рассуждения излишни: довольно того, что запомнить число $3/2$ легче, чем 1,41421356237... Но поймите и Кеплера: он желал вызвать у читателя чувство уважения к науке (для этого он рассматривал даже бочки, полученные при вращении дуг эллипсов, гипербол, парабол, ...). И на жизнь он зарабатывал не математическими и даже не астрономическими занятиями, а выпуском календарей, содержащих предсказания всякого рода, и составлением гороскопов, т.е. предсказаний судьбы на основании расположения светил на небе. «Лучше издавать альманахи с предсказаниями,– писал Кеплер,– чем просить милостыню.» «Астрология – дочь астрономии, хотя и незаконная, и разве не естественно, чтобы дочь кормила свою мать, которая иначе могла бы умереть с голоду?»

А менее романтический и более проницательный читатель обратит внимание не на восторги, а на суть дела: «... по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно». Что хотел сказать этим Кеплер?

«Убывание нечувствительно»

Тому, кто еще не знаком с математическим анализом, проще всего объяснить мысль Кеплера, если вспомнить формулу

$$y = \frac{2}{3\sqrt{3}} - t^2\sqrt{3} - t^3.$$

При малых t величины $t^2\sqrt{3}$ и t^3 очень малы. Если, например, $t = 0{,}001$, то $t^2 = 0{,}000001$ и $t^3 =$

---

[8] *См., например, статьи Ю.Соловьева «Неравенство Коши» (Приложение к журналу «Квант» №4 за 1994 г.) и О. Ижболдина и Л. Курляндчика «Неравенство Иенсена» («Квант» № 4 за 2000 г.).*

[9] *Его легко доказать, возведя обе части в квадрат и сведя дело к неравенству* $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$.

$=0{,}000000001$. Эти две величины малы даже по сравнению с (тоже маленькой) величиной t.

А тот, кто изучал анализ, может обойтись и без замены переменной. По определению, для функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, имеет место равенство

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

По определению предела имеем

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\alpha(h),$$

где $\alpha(h)$ – бесконечно малая величина, т.е. $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$. Значит,

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\alpha(h)\cdot h. \qquad (*)$$

(Последняя формула настолько важна, что в университетских курсах анализа именно ее берут за определение производной.)

Так что же мы видим? Если $f'(x_0)\neq 0$, то отклонение $f(x_0+h)$ от $f(x_0)$ при малых h почти пропорционально h (величина $\alpha(h)\cdot h$ при $h\to 0$ стремится к нулю быстрее, чем $f'(x_0)h$). Если же $f'(x_0)=0$, то отклонение равно $\alpha(h)\cdot h$ и стремится к нулю быстрее, чем h. Это значит, что вблизи точки, где производная равна 0, малое изменение аргумента функции сказывается на изменении функции существенно слабее (Кеплер говорит: «нечувствительно»), чем вблизи точки, где производная отлична от 0. Именно по этой причине небольшие отклонения австрийских бочек от стандарта практически не влияли на точность измерения их объема кубической линейкой.

Немного отвлекаясь от темы, заметим, что «нечувствительность изменения» функции вблизи точки, где производная обращается в ноль, является чрезвычайно важным математическим и даже общенаучным фактом. Например, кто из нас не клял нескончаемо длинные зимние ночи? И ведь как они начинаются, так несколько месяцев темень и темень. Ноябрь, декабрь, январь, февраль – короткий день и длинная ночь! Не то обидно, что 22 декабря день очень короток. Обидно, что так обстоит дело не только 22 декабря. Казалось бы, продолжительность дня должна меняться, а она целый месяц практически не меняется!

Но в свой срок приходит весна[10], продолжительность дня довольно быстро возрастает, и, к нашему удовольствию, долго, весь май и все лето, дни длинные, а ночи короткие. «Изменения нечувствительны» не только в точке минимума, но и в точке максимума!

В книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» американский физик Ричард Фейнман (1918–1988) рассказывает такую историю: «Когда я был в Массачусетсском технологическом институте, я любил подшучивать над людьми. Однажды в кабинете черчения какой-то шутник поднял лекало (кусок пластмассы для рисования гладких кривых – забавно выглядящая штука в завитушках) и спросил: «Имеют ли кривые на этих штуках какую-либо формулу?». Я немного подумал и ответил: «Несомненно. Это такие специальные кривые. Дайка я покажу тебе.– Я взял свое лекало и начал его медленно поворачивать. – Лекало сделано так, что, независимо от того, как ты его повернешь, в наинизшей точке каждой кривой касательная горизонтальна».

Все парни в кабинете начали крутить свои лекала под различными углами, подставляя карандаш к нижней точке и по-всякому прилаживая его. Несомненно, они обнаружили, что касательная горизонтальна. Все были крайне возбуждены от этого открытия, хотя уже много прошли по математике и даже «выучили», что производная (касательная) в минимуме (нижней точке) для любой кривой равна нулю (горизонтальна). Они не совмещали эти факты. Они не знали даже того, что они уже «знали».

Я плохо представляю, что происходит с людьми: они не учатся путем понимания. Они учатся каким-то другим способом – путем механического запоминания или как-то иначе. Их знания так хрупки!».

А вот еще пример: поведение синуса и косинуса вблизи нуля. Известное равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$$

(первый замечательный предел) означает, что при малых x (величина x, разумеется, измеряется в радианах, а не в градусах)

$$\sin x\approx x.$$

Производная функции $\cos x$ в точке $x=0$ равна нулю, поэтому $\cos x$ при малых отклонениях x от нуля «меняется нечувствительно». Точнее,

$$\cos x=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\approx 1-\frac{x^2}{2}.$$

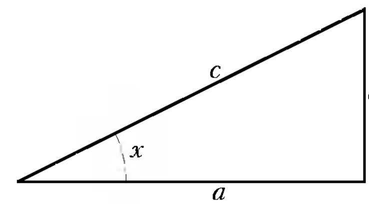


Рис.11

Другими словами, если мы рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис.11), где b мало по сравнению с c, то, обозначив буквой x величину угла, противоположного катету b, получим

$$x\approx\sin x=\frac{b}{c},\quad a=c\cos x\approx c\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right),$$

откуда

$$c-a\approx\frac{b^2}{2c}.$$

Как вы помните, катет b мал по сравнению с гипотенузой. Поэтому последняя формула означает, что катет a отличается от гипотенузы c на величину гораздо меньшую, чем b («нечувствительно», как сказал бы Кеплер).

В статье «Для чего мы изучаем математику?» («Квант» №1/2 за 1993 год) академик В.И.Арнольд в качестве примера важного общематематического факта, «которому, к сожалению, не учат в школе», привел именно последнюю полученную нами формулу. Он подробно разъяснил, что «больший катет вытянутого прямоугольного треугольника практически столь же длинен, как и гипотенуза», и формула дает хорошее приближение для разности их длин.

Дальше мы не будем пересказывать Арнольда, а процитируем: «Например, предположим, что вы возвращаетесь домой по синусоиде (рис.12). Насколько ваш путь длиннее, чем если бы вы шли прямо?

[10] *Производная становится отличной от нуля, сказал бы прозаик.*

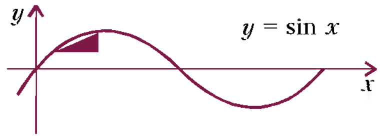


Рис. 12

Первое впечатление (что вдвое), конечно, преувеличивает длину. Все же кажется, что путь по синусоиде длиннее раза в полтора. На самом деле всего примерно на 20%. Причина в том, что бóльшая часть синусоиды слабо наклонена к оси, поэтому соответствующие гипотенузы практически не длиннее катетов.

Вот еще одно применение той же формулы. Реактивные струи первых реактивных двигателей, установленных на крыльях самолета вблизи фюзеляжа, представляли опасность для хвостового оперения. Конструкторы, знавшие и чувствовавшие обсуждаемую формулу, повернули

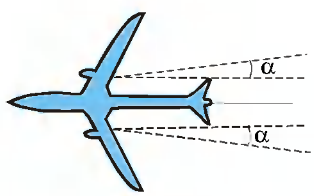


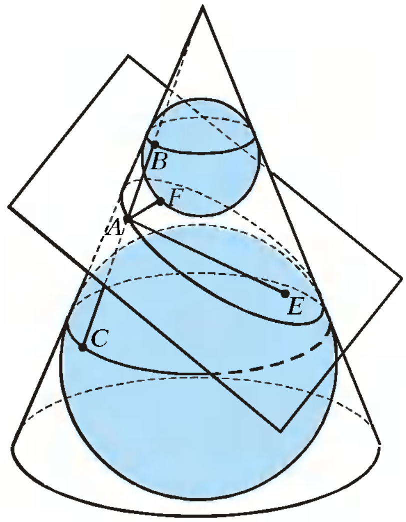
Рис. 13

двигатели на небольшой угол α (рис.13).

Хвостовое оперение было спасено (отклонение струи пропорционально α), а результирующая сила тяги практически не изменилась (потеря $\approx \alpha^2/2$, где α – угол в радианах; для угла в 3° теряется всего порядка $1/800$ мощности)».

Впрочем, в XVII веке реактивной авиации еще не было. Вернемся к Кеплеру. Наш последний (и очень важный для астрономии и физики) пример имеет самое непосредственное отношение к открытым им законам движения планет. В только что процитированной статье Арнольда читаем: «Его учитель Тихо Браге в обсерватории «Ураниборг» в течение 20 лет скрупулезно измерял положения планет Солнечной системы. После смерти учителя Кеплер взялся за математическую обработку результатов этих наблюдений и обнаружил, что, например, траектория движения Марса – эллипс.

Эллипс – это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна.



$$FA + AE = BA + AC = BC$$

Рис. 14

Тот факт, что сечение конуса плоскостью, достаточно сильно наклоненной к его оси, является эллипсом, – замечательная геометрическая теорема, к сожалению, не доказываемая в школе. Доказательство ее очень просто (рис.14). Вписанные в конус и касающиеся плоскости (в фокусах E и F эллипса) сферы, на рассмотрении которых основано доказательство, называются сферами Данделена.

Чтобы понять рассуждения Кеплера, нам потребуются некоторые простые факты из геометрии эллипса.

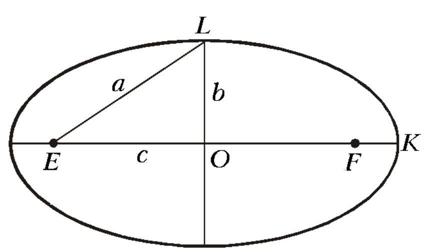


Рис. 15

Длина большой полуоси эллипса OK (рис.15), обычно обозначаемая через a, равна длине гипотенузы EL треугольника с катетами $b = OL$ (малая полуось) и $c = EO$. Отношение c/a характеризует форму эллипса и называется эксцентриситетом, так как пропорционально смещению фокусов от центра эллипса. Эксцентриситет обычно обозначают буквой e.

По теореме Пифагора отношение длин полуосей эллипса есть

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} \approx 1 - \frac{e^2}{2}$$

при малых e».

Прервем цитату, чтобы пояснить эту формулу. Если вы знакомы с производными, то знаете, что производная функции $f(x) = \sqrt{x}$ равна $1/(2\sqrt{x})$, и можете подставить $x_0 = 1$ и $h = -e^2$ в формулу (*). А если не знакомы, то попросту возведите в квадрат:

$$\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2 = 1 - e^2 + \frac{e^4}{4} \approx 1 - e^2.$$

Продолжим цитату: «Отсюда видно, что эллипс с малым эксцентриситетом практически неотличим от окружности. Например, если $e = 0{,}1$, то малая ось короче большой всего на $1/200$. Для эллипса с длиной большой оси 1 метр малая ось короче большой всего на полсантиметра, так что на глаз отличие такого эллипса от окружности вообще не заметно. Фокусы же смещены от центра на 5 см, что очень заметно...

Сначала Кеплер думал, что орбита Марса – окружность. Однако Солнце оказалось не в центре, а сдвинутым примерно на $1/10$ часть радиуса. Но Кеплер не остановился на этом (уже замечательном) результате – потому что он знал теорию конических сечений. Кеплер знал, что эллипс с маленьким эксцентриситетом очень похож на окружность, и проверил, как ведет себя то небольшое отклонение орбиты от окружности, которое еще оставалось...

Орбита Марса оказалась слегка сплюснутой в направлении, перпендикулярном диаметру, на котором лежит Солнце, – примерно на полпроцента, т.е. на $e^2/2$. Так Кеплер пришел к мысли об эллиптических орбитах планет».

Как видите, разница между «чувствительным» и «нечувствительным» изменением существенна не только для австрийской бочкотары, но и для астрономии!

Ошибка, которую не сделал Кеплер

«Рукопись этой книги, – сказано в «Новой стереометрии...», – пролежала шестнадцать месяцев у аугсбургского книготорговца, и ... вопреки данному мне обещанию не была напечатана.

... С этого времени у меня явилось намерение напечатать эту книжку самому, несмотря на большой недостаток средств. При этом мне представилась возможность не только исправить ее, но и продвинуть в отношении объема сравнительно с первоначально написанной. Не скрою, что на эти размышления было затрачено некоторое время, уделенное от прочих занятий, но я не жалею об этой потере, так как никоим образом невозможно, чтобы пожал плод бессмертия труд, не посеявший некоторого времени.»

Кеплер не скрывает от читателя свои методы и даже заблуждения. Например, доказав, что из всех вписанных в данный круг прямоугольников наибольшую площадь имеет квадрат[11], он признаётся: «Не хочу скрыть ошибки, в которую меня первоначально ввергло поверхностное рассмотрение этой теоремы, ибо это напоминание предупредит читателя, чтобы он остерегался подобных же (заблуждений)». И дальше подробно объясняет, в чем дело, доказывая странную для нынешнего читателя теорему III: «Отношения объемов прямых цилиндров, осевые сечения которых имеют одну и ту же диагональ, не аналогичны[12] отношениям площадей осевых сечений, и при наибольшей площади сечения объем не наибольший».

В другом месте читаем: «Кто, избавившись от заблуждения приписывать наибольший объем тому из цилиндров с данной диагональю, у которого площадь осевого сечения наибольшая, и узнав, что самым вместительным будет по теореме V цилиндр, в котором отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}$,... оказался бы столь проницательным и осторожным, чтобы тотчас не предположить того же самого и об объеме усеченного конуса..? Я же это подумал и держался такого мнения последние полтора года и даже дошел до того, что, опираясь на это основание, считал все рейнские бочки, без различия их пузатости, в отношении емкости ниже австрийских... Поэтому я отношу к пользе, полученной от настоящего печатания, что при подготовке издания геометрия потеребила меня за ухо...».

А вот редакцию «Кванта» никто не потеребил, когда Кеплеру была приписана ошибка, которую он не сделал. В статье «Секрет Старого Бондаря» читаем: «Обращусь теперь к более общему случаю,– рассуждал Кеплер[13],– когда ... бочку можно с достаточно хорошей точностью представить себе как составленную из двух одинаковых усеченных конусов, состыкованных своими большими основаниями (см. рис.6).

При этом я, конечно, допущу некоторую неточность, но если бочка не очень «пузатая», то погрешность будет незначительной. Затем среди всевозможных бочек, у которых расстояние AE равно заданному d, выберу ту, которая имеет наибольшую вместимость».

Обозначим $AF = 2r$ и $EN = z$, где N – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BE (см. рис.6). При помощи формулы объема усеченного конуса, которая еще встретится нам в этой статье, можно вычислить объем бочки:

$$V = \frac{2}{3}\pi\left(r^2 + r(z-r) + (z-r)^2\right)\sqrt{d^2 - z^2}.$$

Далее в статье сформулирована задача: «Докажите, ... что среди бочек указанного вида с заданным значением d... наиболее вместимой оказывается цилиндрическая бочка, у которой образующая в $\sqrt{2}$ раз больше диаметра днища».

И 14 лет никто из сотен тысяч читателей не замечал, что утверждение этой задачи ложно! Мы сейчас воспроизведем (с незначительными сокращениями) решение этой задачи из статьи «Секрет Старого Бондаря». Постарайтесь найти ошибку раньше, чем мы ее укажем.

Найдем, при каких значениях переменных r и z емкость бочки V будет – при заданном d – наибольшей. Для этой цели воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Пусть функция $F(r,z)$ при каждом фиксированном (постоянном) z имеет производную по переменному r (обозначим ее F'_r), а при каждом фиксированном r – производную F'_z по переменному z. Если в точке $(r_0; z_0)$ функция $F(r,z)$ принимает свое наибольшее значение, то*

$$F'_r(r_0, z_0) = 0 \text{ и } F'_z(r_0, z_0) = 0.$$

Доказательство. В самом деле, если $F(r_0, z_0) \geq F(r,z)$ для всех r и z, то, в частности, $F(r_0, z_0) \geq F(r, z_0)$ при любом r; это означает, что функция *одного* переменного $f(r) = F'_r(r, z_0)$ имеет при $r = r_0$ максимум; значит, ее производная $f'(r) = F'_r(r, z_0)$ обязана обращаться в ноль при $r = r_0$. Аналогично убеждаемся, что $F'_z(r_0, z_0) = 0$.

Пользуясь этой леммой, найдем максимум функции V. Чтобы не иметь дело с корнями, будем искать максимум функции V^2 (ведь V и V^2 достигают своих максимумов одновременно). Итак,

$$F(r,z) = V^2 = \frac{4}{9}\pi^2\left(r^2 + z^2 - rz\right)^2\left(d^2 - z^2\right).$$

Для нахождения точки максимума найдем, согласно лемме, F'_r и F'_z и приравняем их нулю:

$$F'_r = \frac{8}{9}\pi^2\left(r^2 + z^2 - rz\right)(2r - z)\left(d^2 - z^2\right) = 0,$$

$$F'_z = \frac{4}{9}\pi^2\left(r^2 + z^2 - rz\right)\times$$

$$\times\left(2(2z - r)\left(d^2 - z^2\right) + \left(r^2 + z^2 - rz\right)(-2z)\right) = 0.$$

Учитывая, что $0 < z < d$, получаем

$$z = 2r,$$

так что бочка – цилиндр. Подставив $z = 2r$ в формулу для F'_z, получим

$$8\pi^2 r^3\left(d^2 - 6r^2\right) = 0,$$

откуда $r = d/\sqrt{6}$. Значит,

$$d^2 - z^2 = d^2 - 4r^2 = d^2 - \frac{4d^2}{6} = \frac{d^2}{3},$$

откуда и следует утверждение задачи.

Ну конечно же, приравнивать производную нулю имеет смысл только во внутренних точках области, определения рассматриваемой функции. Равенство $z = 2r$ как раз задает одну из границ этой области, и поэтому подстановка $z = 2r$ в равенство $F'_z = 0$ ошибочна. Впрочем, к неправильному ответу привела не эта ошибка, а другая: граничные точки области определения функции надо исследовать отдельно, а о них вообще забыли.

Кто обнаружил ошибку?

Тщательнйе надо, тщательнйе!
М.Жванецкий

Ошибку обнаружила Алла Шмук-

---

[11] *Словами Кеплера: «Осевые сечения прямых цилиндров, имеющих равные диагонали, имеют неравные площади, за исключением того случая, когда у них одинаковые или обратные отношения диаметра основания к высоте; наибольшая площадь среди них у того, который получается от сечения цилиндра с высотой, равной диаметру основания».*

[12] *Т.е. не равны.*

[13] *Он так не рассуждал...*

лер, переводившая на иврит книгу В.М.Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах». В книге было сказано: «Много интересного о задаче Кеплера читатель может почерпнуть из статьи ... «Секрет Старого Бондаря» (Квант, 1986, №8, с. 14)». Всего одно предложение! Нужно обладать фанатичной работоспособностью и сверхдобросовестностью, чтобы для перевода этого предложения пойти в библиотеку и изучить статью, причем настолько внимательно, чтобы заметить ошибку, пропущенную автором и редакцией!

Рейнская бочка

Одна из причин ошибки в статье «Секрет Старого Бондаря»– неудачные обозначения. Вместо z лучше рассмотреть величину $R = BE/2$ (см. рис. 6). Кроме того, обозначим буквой h расстояние между прямыми AF и BE.

Как известно, объем усеченного конуса, радиусы оснований которого r и R, а высота[14] h, равен

$$\frac{\pi h}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right).$$

По теореме Пифагора,

$$d^2 = (r+R)^2 + h^2.$$

Поэтому объем усеченного конуса равен

$$\frac{\pi h}{3}\left(d^2 - h^2 - Rr\right).$$

Если d и h зафиксировать (и если, разумеется, $0 < h < d$), то будет фиксирована сумма $r + R$. Но произведение rR при этом фиксировано не будет! Объем будет наибольшим, когда наименьшим будет произведение rR. Меньше нуля произведение стать не может. А нулем – может. Наибольший объем равен $\frac{\pi h}{3}\left(d^2 - h^2\right)$ и достигается для конуса (при этом $r = 0$ и $R = \sqrt{d^2 - h^2}$).

Итак, бочка максимального объема составлена из двух конусов.

Осталось выяснить, при каком h (разумеется, $0 < h < d$) величина $h\left(d^2 - h^2\right)$ максимальна. Почти такую же задачу мы уже решали, изучая австрийскую бочку. Ответ – при $h = d/\sqrt{3}$. Объем бочки при этом равен $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}d^3$. Это и есть наибольший возможный объем бочки – очень похожей, по словам Кеплера, на те, что приходили с Рейна! (Напомним, что объем австрийской бочки равен $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}d^3$, что составляет лишь 75% объема рейнской бочки. Кеплер комментировал это так: «Предполагая, что бочки представляют собой просто удвоенные усеченные конусы, заключаем, что продолговатые умеренно пузатые вместительнее цилиндрических того же поперечного размера, и никогда не делают бочек столь чудовищно пузатых, чтобы они оказались снова менее вместительны, чем цилиндрические того же продольного размера».)

Конус максимального объема

Интересно, что у задачи о конусе максимального объема есть забавная переформулировка и естественное решение – пятое по счету решение задачи об австрийской бочке!

Рассмотрим круг радиуса R. Вырежем из него сектор и свернем из оставшейся

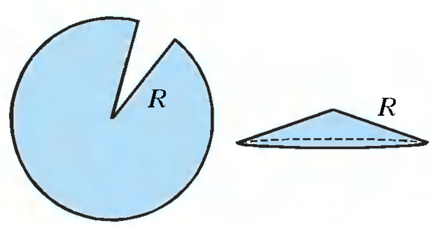


Рис.16

части «фантик» – конус. Совершенно ясно, что если вырезанный сектор очень мал, то высота конуса и его объем тоже

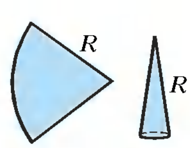


Рис.17

малы (рис.16). Но и вырезать почти все, оставляя лишь маленький сектор (рис.17), тоже неразумно, если мы хотим получить конус сколь-нибудь значительного объема: узкий конус хотя и будет иметь высоту, мало отличающуюся от R, но площадь его основания будет мала.

Чтобы найти конус максимального

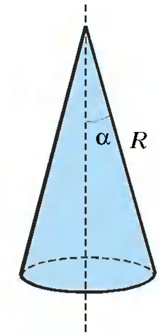


Рис.18

объема, обозначим через α половину величины угла осевого сечения конуса (рис.18). Тогда радиус основания конуса равен $R\sin\alpha$, высота равна $R\cos\alpha$, а объем равен

$$\frac{1}{3}\cdot\pi(R\sin\alpha)^2\cdot R\cos\alpha = \frac{\pi}{3}R^3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Значит, объем максимален, когда максимально значение функции

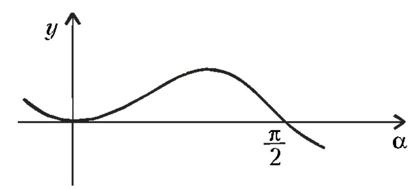


Рис.19

$$\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

График этой функции изображен на рисунке 19. Видно, что максимальное значение достигается при α, чуть превышающем 45°. Впрочем, мы можем явно найти максимум этой функции[15]: ее производная равна $2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$ и обращается в ноль (при $0 < \alpha < \pi$), когда $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Объем конуса при этом равен $2\pi R^3/\left(9\sqrt{3}\right)$.

При помощи калькулятора легко проверить, что

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 109{,}47^\circ.$$

Любители минут[16] могут записать этот ответ в виде 109°27′. В учебнике химии о молекуле метана (CH_4) можно прочитать, что валентные связи атома углерода направлены к вершинам тетраэдра, и угол между ними составляет 109°28′. И это не случайное совпадение: легко проверить, что угол величиной $2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ образуется, если из центра правильного тетраэдра провести лучи

---

[14] *Т.е. расстояние между плоскостями оснований.*

[15] *Заметьте: замена переменной* $x = \cos\alpha$ *приводит к функции* $\left(1-x^2\right)x$, *где* $0 < x < 1$.

[16] *Как известно, 1 градус – это 60 минут.*

в две его вершины. (Другими словами, ребро правильного тетраэдра в $2\sqrt{2}$ раз больше расстояния от центра этого тетраэдра до середины ребра.)

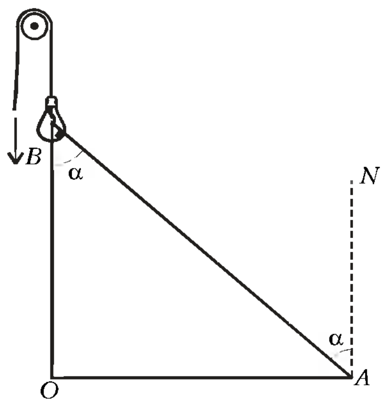


Рис.20

Упражнения

1. Пусть электрическая лампа может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой OB (рис.20). На каком расстоянии от горизонтальной плоскости ее следует поместить, чтобы в точке A получить наибольшую освещенность? (*Указание*. Освещенность E пропорциональна косинусу угла падения лучей ($\angle BAN = \alpha$) и обратно пропорциональна квадрату расстояния AB, т.е. $E = (C\cos\alpha)/AB^2$, где C зависит лишь от лампы.)

2. Найдите $\max\limits_{\substack{a\le b\\ a+b=8}} ab(b-a)$, иными словами, разделите число 8 на две такие части, чтобы произведение их разности на их произведение было максимальным.

3. В данный шар впишите конус максимального объема.

4. В данный конус впишите цилиндр максимального объема, ось которого совпадает с осью конуса.

5. а) Впишите в круг радиуса r прямоугольник так, чтобы произведение одной стороны на квадрат другой было наибольшим. б) Известно, что прочность балки с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна ширине и квадрату высоты. Докажите, что у балки наибольшей прочности, выпиленной из круглого бревна, отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

6. Найдите наибольший возможный объем прямоугольного параллелепипеда, основание которого квадрат, а периметр каждой из четырех боковых граней равен 6.

7. Найдите наибольший возможный объем параллелепипеда, вписанного в тетраэдр объема V.

8. Какие значения может принимать площадь сечения тетраэдра плоскостью, параллельной боковой грани тетраэдра и касающейся вписанного в тетраэдр шара, если сумма площадей граней тетраэдра равна S?

9. Найдите наибольший возможный объем цилиндра, вписанного в куб со стороной 1 таким образом, что ось цилиндра лежит на диагонали этого

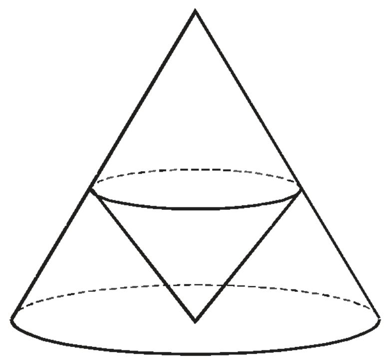


Рис.21

куба.

10. В данный прямой круговой конус вписан прямой круговой конус наибольшего возможного объема, вершина которого находится в центре основания данного конуса (рис.21). Докажите, что высота внутреннего конуса составляет треть высоты данного.

11. Сосуд имеет форму перевернутой вверх дном четырехугольной пирамиды. Сторона основания пирамиды (т.е. сторона отсутствующей «крышки») равна 1, высота равна h. В сосуд налита вода, поверхность которой перпендикулярна высоте пирамиды, а высота водяного столба равна a. В сосуд погружается металлический куб, две параллельные грани которого параллельны поверхности воды. Определите все значения a, при которых можно взять куб такого размера, что при его погружении часть воды выльется из сосуда.

12. а) Боковое ребро a правильной n-угольной пирамиды образует с плоскостью основания угол φ. При каком φ объем пирамиды наибольший возможный? б) Апофема правильной n-угольной пирамиды равна b. При каком угле наклона боковых граней к основанию объем пирамиды наибольший возможный?

13. Внутри угла величиной φ возьмем точку, сумма расстояний от которой до сторон угла равна a, и проведем через нее прямую, перпендикулярную биссектрисе угла. При каком значении φ радиус окружности, описанной около полученного треугольника, наименьший возможный?

14. а) Из квадратного жестяного листа со стороной a желают сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезав равные квадраты по углам, удалив их и затем загнув жесть, чтобы

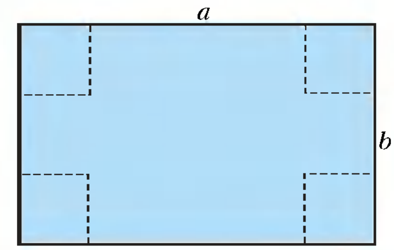


Рис.22

образовать бока ящика. Какова должна

Рис.23

быть длина стороны у вырезаемых квадратов? б) Дан прямоугольный лист жести размером $a \times b$. Вырежьте из его углов одинаковые квадраты (рис.22) так, чтобы после загибания кромок получилась открытая сверху коробка (рис.23) максимально возможного объема.

15. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

а) Докажите, что для любых вещественных чисел p, q, r существует такое число a, что при замене переменной $x = a + t$ коэффициент при t^2 обратится в ноль, и найдите это число. б) Какому неравенству должны удовлетворять числа p, q, r для того, чтобы существовало такое число a, что при замене переменной $x = a + t$ коэффициент при t обратился в ноль? в) Какому неравенству должны удовлетворять числа p, q, r для того, чтобы функция $f(x)$ монотонно возрастала на всей вещественной оси?

16. Если объем и высота некоторого цилиндра равны, соответственно, объему и высоте некоторого усеченного конуса, то радиус шара, описанного около рассматриваемого цилиндра, больше радиуса шара, описанного около рассматриваемого усеченного конуса. Докажите это.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.ru
(раздел «Из номера»)

Плазма как линза времени

П.БЛИОХ

ВСЕ ЗНАЮТ, ЧТО ОПТИЧЕСкая линза способна фокусировать свет: падающий пучок параллельных лучей сходится в фокусе линзы, и его поперечное сечение уменьшается. Оказывается, нечто подобное может произойти и с радиоимпульсом, но его протяженность сокращается не только в пространстве, но и во времени: после прохождения «линзы времени» радиоимпульс становится более коротким. При этом полная энергия импульса сохраняется, а его мощность (энергия в единицу времени) возрастает – подобно тому, как увеличивается яркость светового пятна в фокусе оптической линзы.

Плазменная частота и коэффициент преломления плазмы

Известно, что радиоволны распространяются в пустоте со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В этом нет ничего удивительного, так как свет и радиоизлучение имеют одну и ту же

Иллюстрация Л.Тишкова

физическую природу, представляя собой электромагнитные волны с разными частотами колебаний. Величина c является одной из фундаментальных физических постоянных, но скорость распространения электромагнитных волн равна c только в вакууме. Если же волна проходит через какую-нибудь среду, процесс распространения существенно усложняется. И вот почему.

Даже в том случае, когда среда является электрически нейтральной, в ней все равно присутствуют электрические заряды, которые входят в состав атомов и молекул. Рассмотрим, например, особое состояние вещества – *плазму*. Она представляет собой смесь свободных отрицательных и положительных зарядов. Отрицательными зарядами являются обычно электроны, оторванные от атомов каким-либо внешним ионизирующим воздействием. Положительные заряды (ионы) – это атомы, потерявшие один или несколько электронов. Могут быть и отрицательные ионы – атомы с «прилипшими» электронами, но их вклад обычно мал по сравнению с электронами.

Электромагнитная волна вызывает колебания электрических зарядов – как связанных (в атомах и молекулах), так и свободных (в плазме). Колеблющиеся заряды сами излучают вторичные электромагнитные волны, которые складываются с исходной волной. Результирующая волна распространяется в среде со скоростью, уже отличной от c. Это обстоятельство учитывают, вводя специальную характеристику среды – коэффициент преломления n, который показывает, во сколько раз уменьшается скорость распространения электромагнитных волн в среде по сравнению с вакуумом:

$$v_{\text{ф}} = \frac{c}{n(\omega)}. \qquad (1)$$

Обратите внимание на обозначения. Скорость волны в среде обозначена через $v_{\text{ф}}$, где индекс «ф» показывает, что речь идет о *фазовой скорости* (ниже мы поясним смысл этого определения). Коэффициент преломления зависит от частоты волны ω, что и подчеркивается введением аргумента: $n(\omega)$. Зависимость показателя преломления, а значит, и скорости распространения волны от частоты называют *дисперсией* среды. Поскольку коэффициент преломления является безразмерной величиной, аргумент ω должен входить в $n(\omega)$ в безразмерной комбинации ω/ω_p, где ω_p – собственная частота среды, в плазме ее называют *плазменной частотой.*

Плазменное состояние вещества характерно для космического пространства. В близком к Земле окружении плазма образуется из нейтрального газа, который подвергается внешнему воздействию, способному оторвать электроны от атомов. Таким является, например, коротковолновое излучение Солнца (рентгеновские и ультрафиолетовые лучи). В результате ионизации атмосферы на высоте 50–60 км и выше возникает слой плазмы, который называют *ионосферой*. В дальнем космосе степень ионизации очень высокая, и по современным представлениям 99,9% видимого вещества представляет собой плазму. Искусственно создаваемая плазма широко используется в разнообразных лабораторных установках.

Хотя в состав плазмы входят свободные заряды разных знаков, среда в целом остается электрически нейтральной, точнее *квазинейтральной*. Это означает, что концентрации отрицательных и положительных зарядов равны друг другу в среднем, но могут не совпадать в небольших объемах или в течение коротких промежутков времени. Дело в том, что всегда существует хаотическое тепловое движение частиц, и в любой данный момент времени в одном месте может возникнуть избыток положительных (или отрицательных), а в другом месте – избыток отрицательных (или положительных) зарядов. Тогда, в соответствии с законом Кулона, электроны начнут притягиваться к той области пространства, где имеется избыток положительного заряда (или, что то же, дефицит электронов). Движущиеся заряды пролетят по инерции положение равновесия, и в том месте, где был дефицит электронов, возникнет их избыток. Сила электрического притяжения сменится на силу отталкивания, и электроны начнут двигаться в противоположном направлении. Потом они снова пролетят положение равновесия, остановятся и начнут возвращаться обратно. Этот колебательный процесс будет происходить с определенной частотой ω_p, которую мы сможем легко оценить по аналогии с колебаниями обычного маятника.

Вспомним формулу для частоты собственных колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad (2)$$

где g – ускорение силы тяжести, а l – длина маятника. В плазме кулоновская сила, действующая между двумя электронами, равна $F = ke^2/d^2$, где k – коэффициент, зависящий от выбора системы единиц, в СИ, например, $k = 9\cdot10^9$ м/Ф, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл – заряд электрона, d – среднее расстояние между взаимодействующими зарядами. Если концентрация электронов (число электронов в единице объема) равна N, то $d = N^{-1/3}$. Ускорение, приобретаемое электроном под действием силы F, равно $g_p = F/m$, где $m = 9\cdot10^{-31}$ кг – масса электрона.

Воспользуемся для определения ω_p формулой (2), подставив в нее g_p вместо g и d вместо l:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ke^2N}{m}}. \qquad (3)$$

Интересно, что это выражение полностью совпадает с тем, которое получается на основании строгих вычислений.

К сожалению, вывести формулу для коэффициента преломления простым способом не удается (для этого нам пришлось бы рассчитать, как движется электрон в поле электромагнитной волны и как он излучает вторичные волны), поэтому воспользуемся готовым результатом:

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \qquad (4)$$

Как и следовало ожидать (об этом мы уже говорили), частота ω входит в $n(\omega)$ в безразмерной комбинации ω/ω_p с собственной частотой плазмы. Еще одно важное свойство $n(\omega)$, а именно обращение в 1 при бесконечно высокой частоте ($n(\omega) \to 1$ при $\omega/\omega_p \to \infty$), имеет простое физическое объяснение. Электрические заряды всегда связаны с материальными частицами, которые, в силу инерции, не могут колебаться с бесконечно высокой частотой. Следовательно, они не будут излучать вторичных электромагнитных волн, и исходная волна пройдет сквозь плазму, как через пустое пространство ($v_ф = c$ и $n(\infty) = 1$). Очевидно, что стремление $n(\omega)$ к 1 при $\omega \to \infty$ является свойством любой среды, а не только плазмы.

Две скорости распространения радиоволн в плазме

Подставив выражение (4) для коэффициента преломления в формулу (1), легко убедиться, что $v_ф > c$, так как $n < 1$. Следовательно, волны в плазме распространяются со *сверхсветовой* скоростью! Это утверждение сначала вызывает чувство протеста – ведь согласно теории относительности Эйнштейна никакое воздействие (сигнал) не может распространяться со скоростью большей c! Однако на самом деле противоречия здесь нет. Вычисленная скорость относится к волне, имеющей определенную частоту. Такая волна представляет собой бесконечную синусоиду, которая сама по себе не может передать никакого сигнала, так как ее форма с течением времени остается неизменной. Чтобы передать сигнал, на волне надо поставить какие-либо «метки», или, как говорят, *промодулировать* синусоидальную волну, меняя ее параметры, например амплитуду, по определенному закону. При этом волна уже не характеризуется какой-то одной частотой, а содержит *группу волн* с разными частотами. Набор частотных составляющих, или спектр модулированной волны, зависит от передаваемого сигнала: чем сложнее сигнал, тем шире его спектр.

Рассмотрим простейший случай, когда группа волн состоит всего из двух синусоид с одной и той же амплитудой E_0, но с разными частотами ω_1 и ω_2. Тогда

$$E = E_1 + E_2,$$

где

$$E_1 = E_0 \sin\omega_1\left(t - \frac{x}{v_{ф1}}\right), \qquad E_2 = E_0 \sin\omega_2\left(t - \frac{x}{v_{ф2}}\right). \qquad (5)$$

Мы направили ось X вдоль направления распространения волны и учли, что фазы двух синусоид имеют разное время запаздывания после прохождения одной и той же дистанции x, так как они распространяются с разными скоростями: время запаздывания фазы первой волны на расстоянии x равно $x/v_{ф1}$, а второй волны $x/v_{ф2}$.

В физической литературе принято использовать для описания волновых процессов несколько иные обозначения, а именно вводится так называемое волновое число $k = \omega/v_ф = \omega n/c$. В новых обозначениях формулы (5) становятся симметричными относительно переменных t и x:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x), \qquad E_2 = E_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x), \qquad (6)$$

где $k_1 = \omega_1 n(\omega_1)/c$ и $k_2 = \omega_2 n(\omega_2)/c$. Обозначим среднюю частоту $(\omega_1 + \omega_2)/2$ через ω_0, а полуразность частот $(\omega_1 - \omega_2)/2$ через $\Delta\omega$. Точно так же поступим с $k(\omega)$. Тогда

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega, \quad k_{1,2} = k_0 \pm \Delta k. \qquad (7)$$

После несложных тригонометрических преобразований получим следующее выражение для результирующей волны:

$$E = A(x,t)\sin(\omega_0 t - k_0 x), \qquad (8)$$

где $A(x,t) = 2E_0\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ – амплитуда волны, которая уже не является постоянной величиной. Допустим, что волны (6) имеют близкие друг к другу частоты, т.е. $\Delta\omega \ll \omega_0$ и $\Delta k \ll k_0$. В таком случае амплитуда $A(x,t)$ меняется в пространстве и во времени очень медленно по сравнению с фазой волны.

Вопрос о скорости распространения волны может быть сформулирован двояко. Если иметь в виду скорость распространения фазы, то вопрос формулируется так: с какой скоростью должен двигаться наблюдатель вдоль оси X, чтобы он регистрировал все время *одну и ту же фазу* волны? Положив $\omega_0 t - k_0 x = \text{const}$ и вычислив производную dx/dt, находим требуемую скорость:

$$v_ф = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(\omega_0)}.$$

Это та самая скорость, которую мы ввели ранее в формуле (1). Теперь смысл термина *фазовая скорость* становится понятным.

Аналогично формулируется вопрос о скорости распространения амплитуды: с какой скоростью должен двигаться наблюдатель вдоль оси X, чтобы он фиксировал все время *одну и ту же амплитуду* результирующей волны? Положив $\Delta\omega t - \Delta k x = \text{const}$, находим новую скорость

$$v_г = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},$$

которая называется *групповой скоростью*. Более строго она определяется как предельный переход при $\Delta\omega \to 0$ и $\Delta k \to 0$, или, что то же самое, $\omega_1 \to \omega_2 \to \omega_0$ и $k_1 \to k_2 \to k_0$. При таком предельном переходе дробь $\Delta\omega/\Delta k$ становится равной производной $d\omega/dk$, и

$$v_г = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\omega=\omega_0}, \qquad (9)$$

или, учитывая, что $k(\omega) = \omega n(\omega)/c$,

$$v_г = \frac{1}{(dk/d\omega)} = \left(\frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}\right)^{-1}. \qquad (10)$$

Видно, что только в том случае, когда n не зависит от ω, т.е. $dn/d\omega = 0$, скорости $v_ф$ и $v_г$ совпадают. В плазме это не так. Подставив в (10) формулу (4), получим

$$v_г = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = cn(\omega). \qquad (11)$$

Поскольку $n(\omega) < 1$, то $v_г < c$, т.е. сигнал проходит сквозь плазму со скоростью меньшей c, как и должно быть согласно теории относительности. Сопоставляя формулы (1) и (11), находим простое соотношение, справедливое для радиоволн в плазме:

$$v_ф v_г = c^2.$$

На рисунке 1 приведены графики $v_ф(\omega)$ и $v_г(\omega)$. Формулами (1) и

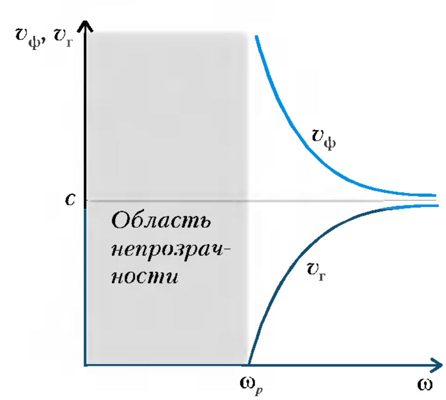


Рис. 1. Зависимость фазовой $v_ф$ и групповой $v_г$ скоростей в плазме от частоты

(11) можно пользоваться только в области частот $\omega > \omega_p$. При $\omega < \omega_p$ подкоренное выражение становится отрицательным и приведенные для скоростей выражения теряют смысл. Если $\omega = \omega_p$, то $v_г = 0$ – сигнал в плазме не распространяется, электромагнитное поле оказывается как бы «привязанным» к источнику, а $v_ф$ при этом становится бесконечно большой. Это означает, что все заряды в плазме колеблются под действием источника в одной и той же фазе.

Расплывание радиоимпульса в плазме

Рассмотрим распространение сигнала в виде отрезка синусоиды с частотой ω_0 и длительностью T_0. Такой радиоимпульс имеет спектр с эффективной шириной

$$\Omega \approx \frac{2\pi}{T_0},$$

симметрично расположенный относительно частоты ω_0 в интервале частот между $\omega_1 \approx \omega_0 + \Omega/2$ и $\omega_2 \approx \omega_0 - \Omega/2$. Вообще говоря, спектр импульса очень широкий и выходит за эти пределы, но основная энергия сигнала сосредоточена в интервале частот $\omega_1 \geq \omega \geq \omega_2$.

Отдельные спектральные составляющие радиоимпульса распространяются сквозь плазму со своими групповыми скоростями, причем чем выше частота, тем больше групповая скорость, поэтому $v_{г1} > v_г > v_{г2}$. На отрезке пути длиной x групповые запаздывания крайних спектральных составляющих равны $t_{зап1} = x/v_{г1}$ и $t_{зап2} = x/v_{г2}$. Будем отсчитывать эти величины от времени запаздывания на центральной частоте ω_0 и введем разности скоростей $\Delta v_{г1} = v_{г1} - v_{г0}$ и $\Delta v_{г2} = v_{г2} - v_{г0}$ (очевидно, что $\Delta v_{г1} > 0$, $\Delta v_{г2} < 0$). Итак,

$$\Delta t_{зап1} = t_{зап1} - t_{зап0} \approx x\left(\frac{1}{v_{г1}} - \frac{1}{v_{г0}}\right) = -x\frac{\Delta v_{г1}}{v_{г0}v_{г1}} < 0,$$

$$\Delta t_{зап2} = t_{зап2} - t_{зап0} \approx x\left(\frac{1}{v_{г2}} - \frac{1}{v_{г0}}\right) = -x\frac{\Delta v_{г2}}{v_{г0}v_{г2}} > 0.$$

Эти формулы можно упростить, если рассматривать (как это обычно бывает) узкополосный сигнал с $\Omega \ll \omega_0$. Тогда можно записать

$$\Delta v_{г1} \approx \left.\frac{dv_г}{d\omega}\right|_{\omega_0} \Delta\omega,$$

$$\Delta v_{г2} \approx -\left.\frac{dv_г}{d\omega}\right|_{\omega_0} \Delta\omega.$$

Кроме того, удобно перейти от временны́х интервалов Δt к пространственным $\Delta\tau$, умножив $\Delta t_{зап}$ на соответствующую групповую скорость. Воспользовавшись приведенными выше формулами и указанными упрощениями, получим

$$\Delta\tau_{зап1}(x) = -\frac{x}{v_{г0}}\left.\frac{dv_{г1}}{d\omega}\right|_{\omega_0} \Delta\omega,$$
$$\Delta\tau_{зап2}(x) = \frac{x}{v_{г0}}\left.\frac{dv_г}{d\omega}\right|_{\omega_0} \Delta\omega. \qquad (12)$$

Графики этих функций (наклонные прямые) представлены на рисунке 2. Разность между $\Delta\tau_{зап1}$ и $\Delta\tau_{зап2}$ определяет протяженность импульса $\tau(x)$ после прохождения дистанции x:

$$\tau(x) = \Delta\tau_{зап2} - \Delta\tau_{зап1} \approx \frac{2\Delta\omega x}{v_{г0}}\left.\frac{dv_г}{d\omega}\right|_{\omega_0}.$$

Учитывая, что эффективная ширина спектра радиоимпульса равна $2\Delta\omega = \Omega \simeq 2\pi/T_0$, а его начальная протяженность составляет $\tau_0 = T_0 v_{г0}$, перепишем формулу для $\tau(x)$ в виде

$$\tau(x) \approx \frac{2\pi}{\tau_0}\left.\frac{dv_г}{d\omega}\right|_{\omega_0} x. \qquad (13)$$

Отсюда следует, что длительность импульса возрастает с расстоянием, которое проходит электромагнитная волна в плазме, т.е. импульс расплывается.

Процесс расширения радиоимпульса в плазме иллюстрируется рисунком 2, который требует некоторых пояснений. Легко сообразить, что формулой (13) можно пользоваться только на достаточно больших расстояниях, так как она не учитывает, что исходная протяженность импульса $\tau(0)$ должна равняться τ_0, а не 0, как следует из (13). На близких к $x = 0$ расстояниях протяженность импульса почти не меняется, что и показано двумя горизонтальными параллельными линиями на рисунке. Протяженность импульса равна, как уже отмечалось, расстоянию между двумя наклонными прямыми, выходящими из начала координат. Верхняя прямая соответствует частоте ω_2, а нижняя – ω_1, сама же ось X соответствует центральной частоте ω_0. Угол между наклонными прямыми равен

$$\alpha = \frac{\tau(x)}{x} = \frac{2\pi\left(dv_г/d\omega\right)\big|_{\omega_0}}{\tau_0}, \qquad (14)$$

а их пересечение с горизонтальными линиями происходит на некотором «граничном» расстоянии

$$x_{гр} \approx \frac{\tau_0^2}{2\pi\left(dv_г/d\omega\right)\big|_{\omega_0}}. \qquad (15)$$

Импульс заметно расширяется в плазме только на расстояниях $x \gg x_{гр}$, хотя деформация импульса начинается постепенно уже на близких расстояниях. На рисунке 2 штриховкой отмечены результаты точного расчета, который показывает детально, как расплывается импульс. Наши оценки описывают приближенно расширение импульса в той его части, где сосредоточена основная энергия сигнала.

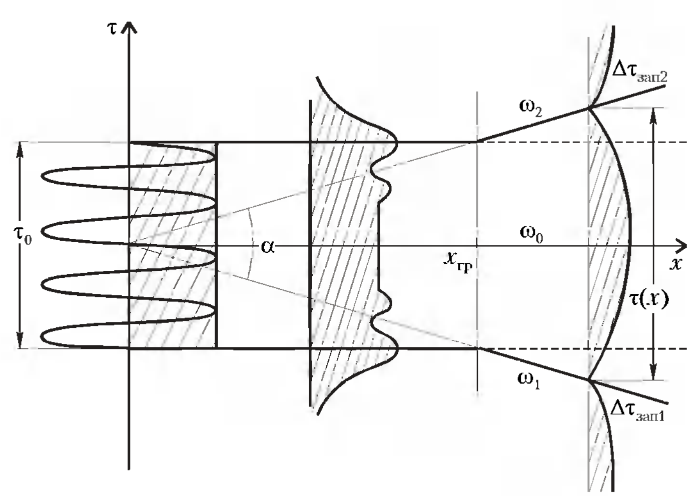


Рис.2. Расплывание импульса в плазме

Дифракция и дисперсия: возможные аналогии

Отвлечемся на некоторое время от задачи о распространении радиоимпульса в плазме и перейдем совсем к другому вопросу – *дифракции электромагнитных волн.* Мы увидим, что формулы (13) – (15) удивительным образом совпадают с соответствующими дифракционными формулами, хотя речь идет о разных физических явлениях. Взгляните на рисунок 3, где показан результат прохождения света через отверстие в непрозрачном экране. Мы не будем рассказывать подробно, как возникает дифракция, т.е. отклонение от первоначального направления распространения света. Заметим только, что на краях отверстия в точках *1* и *2* возникают краевые волны (они показаны условно в виде концентрических окружностей). В результате интерференции (взаимодействия) краевых волн друг с другом и с первичной волной возникает сложное распределение интенсивности в поперечном сечении пучка света (заштрихованные области). Точный расчет показывает, что на больших расстояниях $x \gg x_{\text{дифр}}$ первичный пучок параллельных лучей расширяется в пределах угла

$$\alpha_{\text{дифр}} = \frac{\lambda}{y_0}, \qquad (16)$$

где λ – длина световой волны, y_0 – ширина отверстия в экране. Ширина пучка (расстояние между наклонными прямыми) равна

$$y(x) = \frac{x\lambda}{y_0}. \qquad (17)$$

Дифракция является следствием волновой природы света, поэтому угол дифракции $\alpha_{\text{дифр}}$ пропорционален длине волны λ. На близких расстояниях $x \ll x_{\text{дифр}}$ расширение пучка происходит очень незначительно, что и отмечено начальными участками горизонтальных прямых, проведенных жирными линиями. Результаты точного расчета распределения интенсивности в поперечном направлении показаны штриховкой. Граничное значение $x_{\text{дифр}}$, начиная с которого в полной мере проявляются дифракционные явления, определяется из условия пересечения горизонтальных прямых с наклонными линиями $y_{1,2}(x) = \pm x\lambda / y_0$:

$$x_{\text{дифр}} = \frac{y_0^2}{\lambda}. \qquad (18)$$

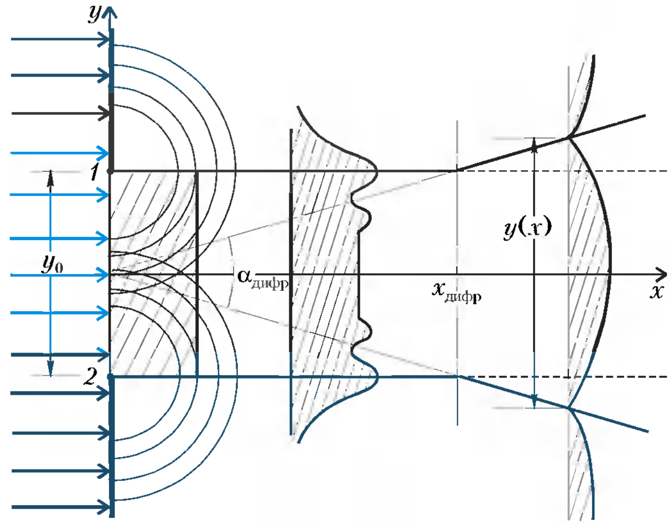


Рис.3. Дифракция света на отверстии в непрозрачном экране

Область $x \ll x_{\text{дифр}}$ называют ближней зоной, а область $x \gg x_{\text{дифр}}$ – дальней зоной.

Вернемся снова к радиоимпульсу в плазме. Даже беглого взгляда на рисунки 2 и 3 достаточно, чтобы увидеть, что расплывание импульса в плазме за счет *дисперсии* и расширение пучка света вследствие *дифракции* происходят аналогичным образом. Это подтверждается сравнением формул (13) и (17), а также (14) и (16), (15) и (18). Видно, что величина $2\pi(dv_{\text{г}}/d\omega)\big|_{\omega_0}$ в плазменных формулах играет роль длины волны λ в дифракционных формулах, а исходная пространственная протяженность импульса τ_0 соответствует ширине отверстия y_0. Таким образом, можно ввести «дисперсионную длину волны»:

$$\lambda_{\text{дисп}} = 2\pi(dv_{\text{г}}/d\omega)\big|_{\omega_0}.$$

Подчеркнем, что это чисто формальная аналогия: описывая деформацию радиоимпульса в плазме, можно пользоваться дифракционными формулами, если произвести в них замену

$$\lambda \to \lambda_{\text{дисп}},\ y_0 \to \tau_0. \qquad (19)$$

Линза времени

Формулы соответствия (19) описывают пространственно-временну́ю аналогию между процессами дифракции и дисперсии. Но дело не только в формальном сходстве. Эти соотношения наводят на мысль, что если в каком-нибудь оптическом приборе происходят пространственные преобразования пучков света, то, используя дисперсию, можно повторить те же преобразования с радиоимпульсами в плазме, но *не в пространстве*, а *во времени.* Иными словами, формулы (19) указывают на возможность создания «временны́х оптических приборов».

Покажем, как это делается, на примере простого оптического устройства – собирающей линзы (рис.4). Пучок параллельных лучей преломляется в линзе таким образом, что все лучи пересекаются в одной точке F – фокусе линзы. Таков ход лучей без учета дифракции света, или, как говорят, в приближении *геометрической оптики.* Однако мы уже знаем, что ограниченные размеры отверстия в экране приводят к дифракционному разбросу лучей на угол $\alpha_{\text{дифр}} = \lambda / y_0$. Поперечное сечение пучка лучей в фокусе линзы с учетом дифракции равно

$$y_{\text{фок}} = F\alpha_{\text{дифр}} = F\frac{\lambda}{y_0}. \qquad (20)$$

Действие линзы (фокусировка) окажется эффективной, если $y_{\text{фок}} \ll y_0$, или

$$F \ll \frac{y_0^2}{\lambda}. \qquad (21)$$

Из сравнения (21) с (18) следует, что линза хорошо работает только в ближней зоне, где $F \ll x_{\text{дифр}}$.

Не представляет труда определить, как возрастет интенсивность света в фокусе, считая, что потерь энергии в линзе не происходит. Поскольку интенсивность света равна энергии, приходящейся на единицу площади, коэффициент усиления интенсивности с учетом дифракции $Q_{\text{дифр}}$ будет равен отношению площадей поперечного сечения пучка света на входе в линзу и в ее фокальной плоскости, которые, в свою очередь, пропорциональны квадрату попереч-

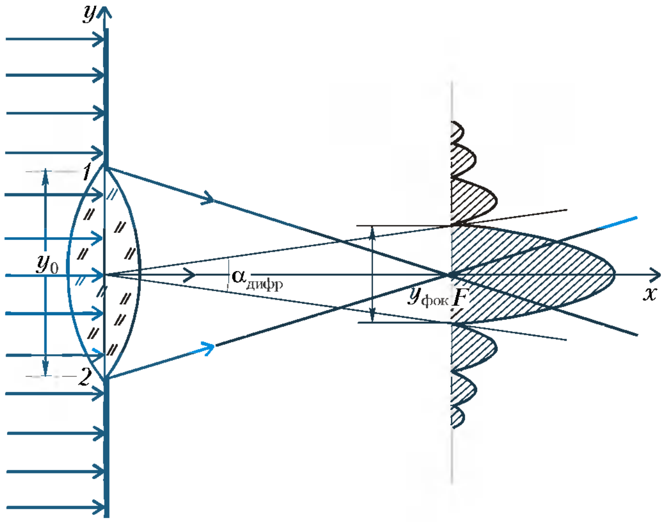


Рис.4. Действие собирающей линзы с учетом дифракции света

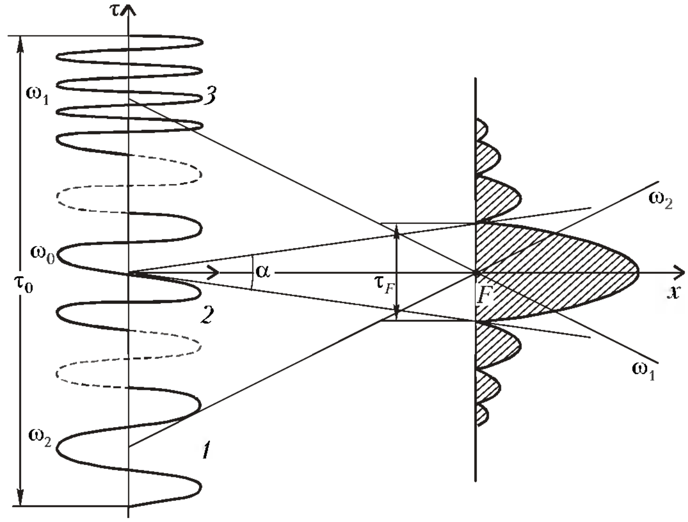


Рис.5. Сжатие частотно-модулированного радиоимпульса в плазме («линза времени»)

ных размеров:

$$Q_{\text{дифр}} \approx \frac{y_0^2}{y_{\text{фок}}^2} \approx \frac{y_0^4}{F^2\lambda^2}. \qquad (22)$$

Чем короче фокусное расстояние, тем сильнее возрастает интенсивность. В предельном случае, когда фокусировка происходит на краю ближней зоны, $F = x_{\text{дифр}}$ и $Q_{\text{дифр}} \approx 1$ – усиления интенсивности не происходит. При $F > x_{\text{дифр}}$ пучок расширяется так сильно, что его интенсивность становится меньше исходной.

Перейдем к конструированию «линзы времени». Рассмотрим распространение нескольких радиоимпульсов разной частоты. На рисунке 5 показаны три таких импульса. Выберем частоты импульсов таким образом, чтобы сначала был выпущен самый низкочастотный импульс ($\omega = \omega_2$), который, согласно рисунку, имеет наименьшую групповую скорость. На определенном расстоянии $x = F$ второй импульс ($\omega_0 > \omega_2$) догонит первый импульс, и в той же точке третий, самый быстрый, импульс ($\omega_1 > \omega_0$) догонит первые два. Таким образом, три импульса объединятся в один, длительность которого меньше, чем общая исходная протяженность всех сигналов.

Изменение частоты при переходе от одного импульса к другому можно сделать плавным, тогда мы получим один *частотно-модулированный* импульс протяженностью τ_0 (этот переход показан на рисунке пунктиром). Мы уже знаем, что за счет дисперсии он будет расширяться на угол $\alpha \approx \lambda_{\text{дисп}}/\tau_0$ и в точке F его протяженность будет равна $\tau_F \approx F\lambda_{\text{дисп}}/\tau_0$. Импульс окажется сжатым («сфокусированным»), если $\tau_F \ll \tau_0$. Для этого дистанция, проходимая в плазме, должна быть не очень велика: $F \ll \tau_0^2/\lambda_{\text{дисп}}$ (сравните с (21)). Коэффициент сжатия радиоимпульса за счет дисперсии $q_{\text{дисп}}$ будет равен

$$q_{\text{дисп}} \approx \frac{\tau_0}{\tau_F} \approx \frac{\tau_0^2}{F\lambda_{\text{дисп}}}. \qquad (23)$$

Эта формула аналогична (22), но в оптической линзе мы учитывали площади сечения пучка, которые пропорциональны *квадрату* размеров, а здесь рассматриваются *линейные* величины – протяженности импульсов. Формула (23) показывает также, как возрастает мощность сжатого импульса, поскольку вся исходная энергия теперь сосредоточена в импульсе меньшей протяженности (потерями энергии в плазме часто можно пренебречь). Эффект сжатия импульса («временнáя фокусировка») используется для увеличения мощности радиосигнала при передаче его через ионосферу путем специального подбора закона частотной модуляции импульса.

Дисперсия сигналов играет важную роль при наблюдении естественных импульсных излучателей – пульсаров. Пульсары – это источники космического радиоизлучения с очень высокой стабильностью периода. Импульс пульсара возникает практически одновременно в широком интервале радиоволн. Однако при прохождении через атмосферу пульсара и межзвездную плазму низкочастотная часть излучения запаздывает относительно высокочастотной, поэтому высокочастотные импульсы приходят к наблюдателю раньше низкочастотных. По величине запаздывания импульсов судят о расстоянии до пульсара и о концентрации электронов на луче зрения от источника к наблюдателю. Таким образом исследуется распределение электронов в межзвездном газе Галактики.

В заключение сделаем еще одно замечание. Рассмотренная пространственно-временнáя аналогия не является специфическим свойством плазмы. В любой среде с такой же дисперсией радиоимпульс будет деформироваться по тому же самому закону. Оказывается, такие среды могут быть изготовлены достаточно просто искусственно. Например, в диапазоне сверхвысоких частот можно воспользоваться волноводом. В более низкочастотном диапазоне, где вместо волноводов используются линии передач из емкостей и индуктивностей, также можно подобрать закон дисперсии, обеспечивающий необходимую деформацию радиоимпульсов.

Александр Попов и Гульельмо Маркони

А. ВАСИЛЬЕВ

Электромагнитные волны, честь открытия и экспериментального изучения которых принадлежит немецкому ученому Генриху Герцу, сыграли выдающуюся роль в становлении и развитии современной цивилизации. Теле- и радиокоммуникации изменили жизнь каждого человека и способствовали прогрессу многих направлений науки и техники. Автор великого открытия, будучи увлечен лишь фундаментальными аспектами проблемы, мало интересовался вопросами практического использования электромагнитных волн. Прикладными, как теперь принято говорить, исследованиями по использованию электромагнитных волн для беспроводной связи практически в одно и то же время и независимо друг от друга занялись русский физик и электротехник Александр Попов (1859—1906) и итальянский инженер и предприниматель Гульельмо Маркони (1874—1937). И тот и другой в своих опытах опирались на схему генерации и приема электромагнитных волн, разработанную Герцем и усовершенствованную затем многими физиками.

Как известно, для создания и регистрации электромагнитных волн Герц использовал вибратор и резонатор. Вибратор состоял из двух стержней с металлическими шарами на концах, подключенных к источнику высокого напряжения (катушка Румфорда), а резонатор представлял собой прямоугольную рамку с небольшим зазором между концами. Основными недостатками вибратора были быстрое затухание колебаний и обгорание контактов. Уменьшить затухание и тем самым увеличить число колебаний удалось Эберту, который использовал вместо одного три искровых промежутка. А проблема обгорания контактов была решена, когда искровой промежуток был помещен в жидкий диэлектрик, как это сделал Риги, используя вазелин, или Саросен и Деглярив, используя оливковое масло. Эти усовершенствования позволили также увеличить длину искры, что повысило мощность излучения вибратора. Для удобства управления электромагнитными импульсами в первичную цепь источника высокого напряжения Маркони включил ключ телеграфного аппарата и в результате получил схему передатчика, вполне пригодную для радиосвязи.

Недостатком резонатора Герца была малая по длине искра, которая проскакивала в узком зазоре согнутой в виде рамки проволоки. Для повышения чувствительности резонатора Лоданом была использована способность металлических опилок и порошков резко повышать свою электропроводность под влиянием происходящего вблизи электрического разряда. Если металлическими опилками заполнить трубку, установить на ее концах электроды и включить в цепь постоянного тока, то в отсутствие электрического разряда тока в цепи не будет. Если же вблизи такого устройства, которое получило название «когерер», происходит электрический разряд, ток в цепи возникает в результате слипания или спекания опилок. Для восстановления прежних свойств порошка когерер достаточно слегка встряхнуть. Историческая справедливость требует отметить, что идея встряхивания когерера для восстановления его чувствительности принадлежит английскому ученому Лоджу. Он же впервые применил для этой цели часовой механизм от аппарата Морзе и осуществил передачу электромагнитных волн на некоторое расстояние за пределы лаборатории.

В современном понимании работа когерера обусловлена туннельным эффектом, сопровождающим автоэлектронную эмиссию (выход электронов из металла или полупроводника под воздействием сильного электрического поля, приложенного к его поверхности). При отсутствии напряжения между электродами сопротивление когерера велико из-за тонких (порядка нескольких ангстрем) изолирующих пленок окислов, покрывающих металлические частицы. При небольших напряжениях на электродах напряженность электрического поля в зазорах между контактирующими опилками достигает значений, достаточных для начала автоэлектронной эмиссии. Электроны при этом туннелируют через потенциальные барьеры, создаваемые пленками окислов. Дальнейшее повышение напряжения приводит к искровому пробою зазоров и к спеканию микроконтактов. Сопротивление когерера при массовом спекании контактов уменьшается на много порядков, и это состояние сохраняется при снятии напряжения.

Когереры оказались очень чувствительны к так называемым тогда волнам Герца и получили широкое распространение для приема и регистрации электромагнитных колебаний. В когерере Попова стеклянная трубка заполнялась железным порошком, а роль электродов выполняли платиновые полоски, наклеиваемые изнутри по всей длине трубки. В когерере Маркони электроды изготавливались из серебра и имели цилиндрическую форму, а пространство между ними заполнялось порошком серебра и никеля с небольшим количеством ртути. Эти два когерера первыми нашли применение для радиосвязи на больших расстояниях.

Для обеспечения резонансной связи передатчика и когерера Маркони предложил подключить к контактам когерера провода разной длины. Наиболее эффективным оказался метод подключения, когда один провод поднимался на изоляторах высоко вверх, а другой опускался глубоко в землю. В сочетании с когерером эти два провода (антенна и «земля») дали точно такую же схему, которую использовал в сеансах радиосвязи Попов. Антенна и заземление стали важной вехой на пути развития радиосвязи. Они и сейчас играют первостепенную роль.

Для постоянной радиосвязи усовершенствованный когерер необходимо было встряхивать для восстановления его рабочих свойств после каждого приема сигнала. Для этой цели Попов разработал схему, в которой применил электрический звонок как для обнаружения действия электрических колебаний, так и для автоматического встряхивания опилок в когерере. Когерер подвешивался горизонтально на легких часовых пружинах, над ним располагался звонок так, чтобы при своем действии давать легкие удары молоточком посередине трубки, защищенной от разбивания резиновым кольцом. Ток от батареи напряжением в несколько вольт постоянно циркулировал по трубке когерера (через порошок) и по обмотке электромагнитного реле. Сила этого тока была недостаточна для притягивания якоря реле, но при действии на когерер электромагнитной волны сопротивление опилок резко уменьшалось, а ток увеличивался настолько, что якорь притягивал реле. В такой момент цепь электрического звонка замыкалась, и он подавал звуковой сигнал. Тотчас же от сотрясения молоточком трубки когерера его проводимость уменьшалась, и реле размыкало цепь звонка. На длинный электромагнитный импульс, соответствовавший тире азбуки Морзе, звонок отвечал длительным дребезжанием, на короткий – кратким. Именно такие схемы использовались в первых сеансах радиосвязи, которые были проведены Александром Поповым в России в 1895 году и Гульельмо Маркони в Англии в 1896 году.

Интересно, что в судьбах изобретателей радио прослеживается общая линия: и тот и другой были тесно связаны с военно-морским флотом. Александр Степанович Попов окончил физико-математический факультет Петербургского университета, где представил диссертацию «О принципах магнито- и динамоэлектрических машин постоянного тока», и работал впоследствии в Минном офицерском классе в Кронштадте. Наряду с преподаванием курса электричества Попов принимал активное участие в решении практических задач, встававших перед военно-морским флотом. Работая над исследованием причин появления искр в проводке вдоль металлического борта корабля, Попов столкнулся с мало тогда изученными проявлениями колебаний токов высокой частоты. Он увлекся вопросами высокочастотных электрических колебаний, причем его интересовала не только научная сторона вопроса, но и возможность использования этих физических явлений для практических целей. Флот нуждался в надежном способе сигнализации, т.е. в методах приема и передачи сигналов. Интуиция ученого, навыки отличного экспериментатора и большие изобретательские способности подсказали Попову путь, по которому надо идти для претворения идеи беспроводной связи в реальность.

В 1897 году Попов выступил в Кронштадском морском собрании с лекцией о возможности телеграфирования без проводов. Проект Попова был одобрен, он получил средства для проведения опытов и перешел от лабораторных экспериментов к организации радиосвязи на больших расстояниях. Эти опыты проводились в Кронштадской гавани со специально построенными для этого приборами, которые были установлены на крейсерах «Россия» и «Африка». В одном из первых сеансов радиосвязи Попов отдал дань уважения физику, открывшему электромагнитные волны. Радиограмма, переданная с материка на остров Гогланд в Финском заливе, состояла из имени и фамилии ученого – «Генрих Герц». Вскоре вслед за этими опытами началось интенсивное развертывание радиосвязи на флоте, что привело к результатам, о которых в начале 1900 года заговорил весь мир. В этом же году применение беспроволочного телеграфа вышло за пределы флота. Его стали использовать в сухопутной армии, военно-воздушном деле, а вскоре начали строить и радиостанции общественного пользования. В 1901 году Попов был избран профессором Электротехнического института, где он стал читать курс радиотехники и создал физическую

лабораторию. В 1905 году Попов был избран директором Электротехнического института, однако вскоре после этого он скоропостижно скончался от кровоизлияния в мозг в возрасте всего 46 лет.

Более благосклонной судьба оказалась к итальянскому изобретателю. Образование Гульельмо Маркони получил в техническом училище Ливорно. Его интерес к созданию беспроводной связи возник в 1894 году, когда он впервые ознакомился с опытами Герца. Поскольку итальянское правительство не проявляло интереса к его изобретениям, Маркони отправился в Англию, где в июне 1896 года продемонстрировал перед сотрудниками Британского почтового ведомства и представителями Адмиралтейства беспроводную передачу сигналов (без показа самого устройства). Когда итальянское правительство призвало его на трехлетнюю военную службу, Маркони удалось организовать ее прохождение, числясь курсантом военно-морского училища при итальянском посольстве в Лондоне. В ходе работ по усовершенствованию своего аппарата Маркони обнаружил, что дальность передачи пропорциональна числу и длине используемых антенн, и, установив высокие антенны в проливе Ла-Манш, организовал радиосвязь между Англией и континентальной Европой. В 1901 году он уже передавал сигналы на тысячи километров через Атлантический океан. В 1909 году Гульельмо Маркони был удостоен Нобелевской премии по физике «За развитие беспроволочной телеграфии», а во время первой мировой войны выполнял ряд военных миссий и, в конце концов, стал командующим итальянским военно-морским флотом. До сих пор радистов на судах всего мира неформально именуют «маркони».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1751» или «Ф1758». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи Ф1758 – Ф1760 предлагались на XXXIV Всероссийской физической олимпиаде .

Задачи М1751–М1755, Ф1758 – Ф1762

М1751. Между двумя странами установлено авиационное сообщение. Каждый город одной страны связан беспересадочными рейсами ровно с k городами другой, причем из любого города этих стран можно перелететь в любой другой, возможно с пересадками. (Города одной страны рейсы этой авиакомпании не соединяют.) Из-за финансового кризиса пришлось закрыть один рейс. Докажите, что теперь по-прежнему из любого города можно долететь в любой другой.

О.Мельников

М1752. Сколькими способами можно расставить восемь ладей на черных полях шахматной доски так, чтобы они не били друг друга?

В.Произволов

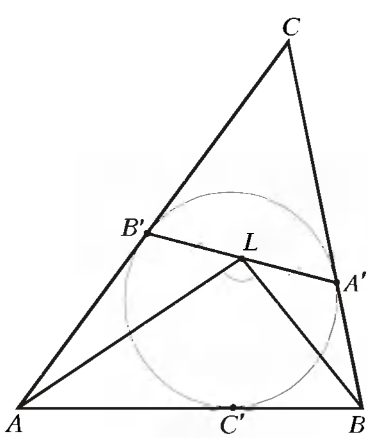


Рис.1

М1753. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A', B', C', точка L – середина отрезка $A'B'$ (рис.1). Докажите, что угол ALB – тупой.

А.Заславский

М1754*. Каждое число натурального ряда окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Докажите, что найдется бесконечная возрастающая последовательность черных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что последовательность

$$a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2, \frac{a_2 + a_3}{2}, a_3, \ldots, a_n, \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_{n+1}, \ldots$$

одноцветна.

В.Васильева, И.Протасов

М1755*. Имеется 10 квадратных салфеток, площадь каждой из которых равна 1, и квадратный стол, площадь которого равна 5. Докажите, что стол можно покрыть салфетками в два слоя. (Салфетки можно перегибать, но нельзя разрывать.)

В.Произволов

Ф1758. Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через $t_1 = 1{,}2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1{,}0$ с попал в лапу стрелявшего мышонка (рис.2). На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд?

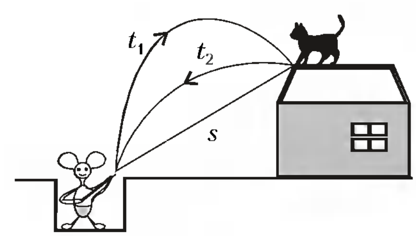


Рис.2

Д.Александров, В.Слободянин

Ф1759. Длинный товарный поезд трогается с места. Вагоны соединены друг с другом с помощью абсолютно неупругих сцепок. Первоначально зазор в каждой сцепке равен L (рис.3). Масса локомотива m, а его порядковый номер первый. Все вагоны загружены, и масса

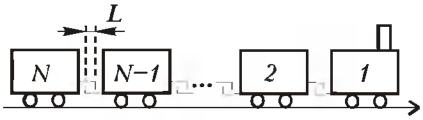


Рис.3

каждого из них тоже m.

1) Считая силу тяги локомотива постоянной и равной F, найдите время, за которое в движение будет вовлечено N вагонов.

2) Полагая, что состав очень длинный ($N \to \infty$), определите предельную скорость v_∞ локомотива.

П.Бойко, Ю.Полянский

Ф1760. К двум точкам A и B, находящимся на одной горизонтали, между которыми расстояние $2a$, прикреплена тонкая легкая нерастяжимая нить длиной $2l$ (рис.4).

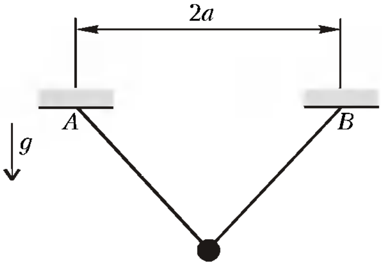


Рис.4

По нити без трения скользит маленькая тяжелая бусинка. Ускорение свободного падения g.

1) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\perp$ в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.

2) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\parallel$ в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.

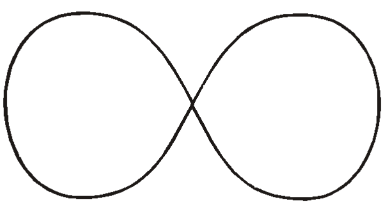


Рис.5

3) При каком отношении l/a траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь вид, представленный на рисунке 5?

Примечание: при решении задачи вам может оказаться полезной формула

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$$

при $x \ll 1$.

В.Пестун

Ф1761. Высокий вертикальный сосуд с площадью дна 10 см^2 и высотой 1 м содержит под поршнем массой 2 кг сухой воздух и три одинаковые маленькие ампулы с водой. Температура воздуха снаружи +100 °С, атмосферное давление нормальное. Вначале поршень висит на высоте 20 см над дном сосуда, а после того, как одна из ампул лопнула, он поднялся и окончательно остановился на высоте 40 см. Сколько воды было в ампуле? Выскочит ли поршень из сосуда, если лопнут остальные две ампулы?

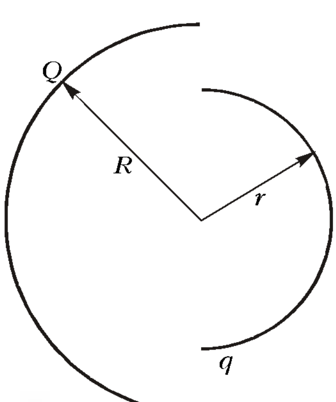


Рис.6

А.Зильберман

Ф1762. Найдите силу взаимодействия двух непроводящих полусфер радиусами R и r с зарядами Q и q соответственно, распределенными равномерно по поверхностям полусфер (рис.6). Центры и плоскости максимальных сечений полусфер совпадают.

Г.Григорян

Решения задач М1726—М1735, Ф1743—Ф1747

М1726. *На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все возможные значения n.*

Ответ: 2000 или 3998.

Если среди n прямых нет параллельных, то $n = 2000$, так как каждая прямая пересекается со всеми остальными. Если же у какой-то из n прямых есть ровно K ей параллельных, то у любой прямой другого направления тоже есть ровно K ей параллельных (иначе эти две прямые пересекались бы с неодинаковым числом других). Значит, $n = (K+1)S$, где S – число различных направлений, которым параллельны прямые. Но тогда $1999 = (K+1)(S-1)$. Так как 1999 число простое, то $K + 1 = 1999$, $S = 2$, т.е. $n = 3998$.

Р.Женодаров

М1727. *Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности есть одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 10 раз.*

Пусть первое число последовательности строго меньше $\underbrace{99\ldots9}_{n}0$. Покажем, что все члены последовательности не превосходят $\underbrace{99\ldots9}_{n+1}$. Каждый раз к числу прибавляется не более 9, поэтому для того, чтобы перейти через $\underbrace{99\ldots9}_{n+1}$, сначала Фома должен получить число $\underbrace{99\ldots9}_{n}?$, где ? – одна из цифр. Ерема может из этого числа вычесть 9, тогда (при ? < 9) снова получается число, меньшее $\underbrace{99\ldots9}_{n}0$. Если же Ерема вычитает ?, то получается $\underbrace{99\ldots9}_{n}0$. Фома может прибавить 0, не изменив числа, или прибавить 9, получив $\underbrace{99\ldots9}_{n+1}$. В любом случае через $\underbrace{99\ldots9}_{n+1}$ он не перейдет.

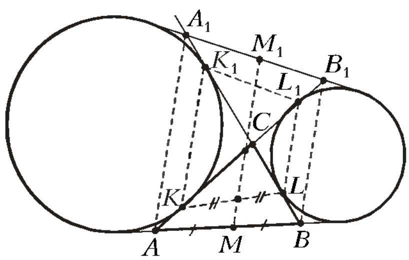
Таким образом, после того как выписано достаточно много членов последовательности (скажем, $\underbrace{100\ldots0}_{n+1} \cdot 99 + 1$), согласно принципу Дирихле хотя бы одно число повторится даже не 10, а по крайней мере 100 раз, так как все члены последовательности – целые числа из отрезка $[0; \underbrace{99\ldots9}_{n+1}]$.

А.Шаповалов

М1728. *Точки K, L на сторонах AC, CB треугольника ABC – это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины KL и AB,*

а) делит периметр треугольника ABC пополам;
б) параллельна биссектрисе угла ACB.

Достроим чертеж задачи до симметричного чертежа, и соображения симметрии помогут нам ее решить (см. рисунок).



Равнобочные трапеции AA_1B_1B и KK_1L_1L обладают тем свойством, что основание AA_1 параллельно основанию KK_1 и отстоит от него на то же расстояние, что и BB_1 от LL_1. Это следует из того известного факта (который легко перепроверить), что отрезки касательных AK и BL равны.

Теперь можно сказать, что средняя линия MM_1 трапеции AA_1B_1B является также средней линией трапеции KK_1L_1L. Чтобы завершить доказательство, осталось сделать два замечания. Первое: MM_1 делит диагональ AB_1 трапеции AA_1B_1B пополам, а половина этой диагонали равна полусумме сторон AC и BC треугольника ABC. Второе: MM_1 параллельна биссектрисе угла ACB.

Л.Емельянов

М1729. *Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечетные числа принадлежат одной части, а четные – другой.*

Для удобства изложения будем считать числа одной части красными, а другой – синими.

Докажем, что любая пара чисел вида $(n, n+2)$ одноцветна. Допустим противное: нашлось такое красное число n, что число $n+2$ синее. Тогда возьмем синее число m ($m > n+2$) такое, что число $m+1$ красное, а также синее число k ($k > m$) такое, что число $k+1$ красное. В этом случае тройка красных чисел $(n, m+1, k+1)$ в сумме дает красное число $n+m+k+2$. Но тройка синих чисел $(n+2, m, k)$ в сумме дает синее число $n+m+k+2$; получено противоречие.

Теперь можно заключить, что все нечетные числа одноцветны, а также, что все четные числа одноцветны. Но все натуральные числа не являются одноцветными. Значит, нечетные числа имеют один цвет (например, красный), а четные – другой (например, синий).

Напоследок можно отметить, что в условии задачи слова «любая тройка чисел» правомерно заменить на слова «любые $2k+1$ чисел» – утверждение при этом останется в силе.

В.Произволов

М1730*. *Продолжения противоположных сторон произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках M и K (рис.1). Через точку O пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная MK. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.*

Проведем через точку D прямую l (сделайте чертеж самостоятельно), параллельную KM; пусть E и F – точки пересечения l с прямыми BC и BA соответственно. Пусть для определенности прямая, проходящая через O параллельно KM и l, пересекает стороны AB и CD четырехугольника. В этом случае для решения задачи надо доказать, что точка O лежит на медиане KL треугольника DKF. Мы докажем, что O – точка пересечения медиан KL и MN треугольников DKF и DME соответственно.

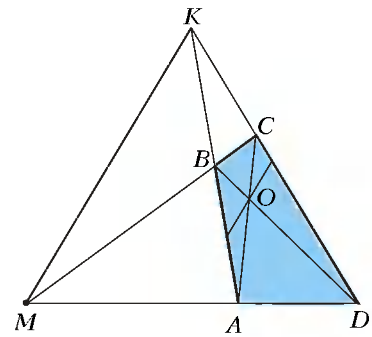


Рис.1

Обозначим точку пересечения медиан KL и MN через X. Докажем вначале, что X лежит на BD, т.е. что прямые DX и BD совпадают. Для этого докажем, что они делят отрезок KM в одном и том же отношении.

Пусть Y – точка пересечения DX и KM. Имеем: $KY/LD = XY/DX$ (поскольку треугольники XYK и XDL подобны), $MY/DN = XY/DX$. Поэтому $KY/MY = LD/DN$. Аналогично доказывается, что BD делит KM в отношении FD/DE. Но $FD = 2LD$, $DE = 2DN$.

Осталось доказать, что X лежит на отрезке AC. Другими словами, что KL и MN делят отрезок AC в одном и том же отношении.

Лемма 1. $VS/BV = AS/AC$, где S – точка на стороне AC треугольника ABC, V – точка пересечения прямой BS с медианой AN этого треугольника.

Доказательство. Рассмотрим точку T отрезка BC такую, что $ST \parallel AN$. Из теоремы Фалеса следует, что $VS/BV = NT/BN = NT/NC = AS/AC$.

Лемма 2. $VS/UV = (AS/AU)(AB/AC)$, где U и S – точки на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно, а V – точка пересечения прямой US с медианой AN этого треугольника.

Доказательство. На стороне AC возьмем точку Z такую, что $UZ \parallel BC$. По лемме 1 имеем $VS/UV = AS/AZ$, а по теореме Фалеса $AC/AB = AZ/AU$. Осталось перемножить эти равенства.

Доказанные утверждения позволяют завершить решение задачи. Именно, по лемме 2 медиана KL делит отрезок AC (считая от C) в отношении $m = (CK/KD)(KF/AK)$, а медиана MN – в отношении $n = (MC/ME)(MD/MA)$. Но $MC/ME = KC/KD$, $KF/AK = MD/MA$. Следовательно, $m = n$.

Утверждение задачи доказано.

Замечание. Вот еще одно, более естественное, хотя и несколько более сложное, доказательство леммы 2. Проведем через V параллельные AS и AU прямые (рис.2). Имеем: $x/y = AC/AB$ (это – характеристическое свойство точек медианы!). Теорема Фалеса дает: $VS/y = US/AU$, $x/UV = AS/US$. Перемножая эти два равенства, получаем $VS/UV = (AS/AU)(y/x) = (AS/AU)(AB/AC)$. Лемма доказана.

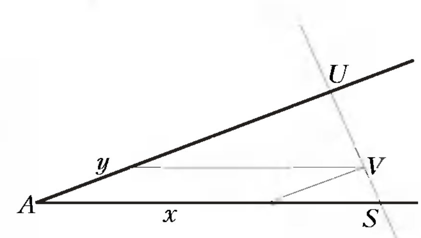


Рис.2

М.Волчкевич, В.Сендеров

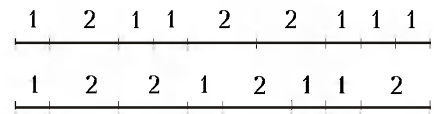
М1731. *Нарисовано 60 звездочек, и двое поочередно заменяют любую звездочку на цифру. Докажите, что второй может сделать так, чтобы полученное число делилось на 13.*

Разобьем полученное число на 10 шестерок цифр. Второй может легко сделать так, чтобы в каждой шестерке первые три цифры совпадали с последними ($abcabc$). Полученное число будет делиться на 1001 и, следовательно, на 13.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1732. *а) Множества A и B на прямой содержат по n точек. Если все троеточия из множества A занумеровать в каком-либо порядке, то все троеточия из множества B можно занумеровать в таком порядке, что всякие два троеточия из A и B, имеющие одинаковые номера, будут равны (при наложении совпадут). Докажите, что множества A и B равны.*
б) Сохранит ли утверждение силу, если в нем «троеточия» заменить на «двоеточия»?*

а) Нужно доказать, что множества A и B равны или, как еще говорят, изометричны. Сначала отметим, что список расстояний между всевозможными парами точек из множества A, в котором $\frac{n(n+1)}{2}$ чисел, совпадает с подобным списком для множества B – это непосредственно вытекает из условия задачи. Отсюда можно заключить, что диаметры множеств A и B равны. Поэтому множества A и B можно разместить на одном отрезке I, концы которого принадлежат как A, так и B.
Теперь нужно доказать, что множества A и B либо совпали, либо симметричны относительно точки Q, которая является серединой отрезка I.
Рассмотрим возможное взаиморасположение точек множества A и множества B на отрезке I с концами α и β. Если точка $\gamma \in A$, то либо $\gamma \in B$, либо точка, симметричная точке γ относительно Q, принадлежит B, так как по условию для троеточия (α, β, γ) из множества A в множестве B имеется равное троеточие. Если две точки γ и δ, симметричные относительно Q, принадлежат множеству A, то обе они принадлежат и множеству B.
Обозначим $C = A \cup B$, в множестве C выделим максимальное подмножество C_1, симметричное относительно точки Q. Тогда $C = C_0 \cup C_1$. Заметим, что множество $A_1 = A - C$ и $B_1 = B - C$ не пересекаются и симметричны относительно точки Q. Если множество A_1 (а значит и B_1) пустое, то A совпадает с B. Если множество C_0 пустое, то A симметрично B относительно Q. Ввиду этого достаточно убедиться, что хотя бы одно из двух множеств C_0 и A_1 обязательно является пустым.
Допустим противное: ни C_0, ни A_1 пустыми не являются. Из определений этих множеств и проведенного анализа следует, что полный список (с учетом кратностей) расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит C_0, а другая A_1, совпадает с полным списком расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит C_0, а другая B_1 (обдумайте детально это умозаключение!).
Но максимальное расстояние между точками множества C_0 и точками множества A_1 не равно максимальному расстоянию между точками C_0 и точками B_1! Чтобы в этом удостовериться, каждое из названных множеств удобно и достаточно представить двумя точками: крайней левой и крайней правой. При этом нужно вспомнить, что A_1 и B_1 симметричны относительно точки Q, а C_0 – строго асимметрично относительно Q.
Значит, противоречие получено, и утверждение доказано.
б) Не сохранит. Приведем пример двух множеств A и B, каждое из которых состоит из 9 точек. При этом полный список расстояний между точками A (из 36 чисел) совпадает с аналогичным списком множества B, но эти множества не равны (не изометричны). Множество A задается словом $abaabbab$, множество B – словом $abbabaab$ (буква в слове – расстояние между соседними точками множества). При $a = 1$ и $b = 2$ множества A и B представлены на рисунке.



Остается открытым вопрос: изменится ли ответ этого пункта, если все расстояния в множестве A считать различными?

В.Произволов

М1733. *Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f = f^{-1}$ и $f(0) = 1$. Докажите равенство*

$$\int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \frac{1}{2}.$$

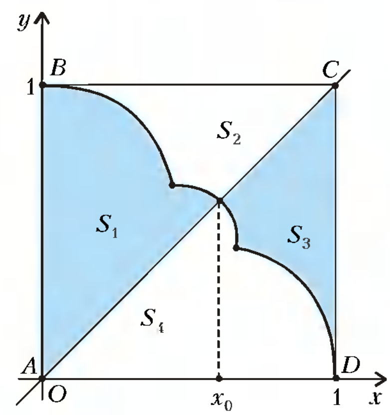


График функции $y = f(x)$ симметричен относительно биссектрисы первого координатного угла $y = x$ (см. рисунок). Значит, $S_1 = S_4$, а $S_2 = S_3$. Поэтому можно записать

$$\int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \int_0^{x_0} (f(x) - x)\,dx + \int_{x_0}^1 (x - f(x))\,dx =$$

$$= S_1 + S_3 = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}.$$

К.Каибханов

М1734. *Докажите, что уравнение $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta = \cos x$ на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ не имеет решений при $\beta \le 3$, но имеет единственное решение при $\beta > 3$.*

Такие задачи обычно сводятся к исследованию функции с помощью производных. Трудность состоит в том, чтобы суметь удачно выбрать исследуемую функцию.
Исследование уравнения задачи мы начнем с очевидного замечания: при $\beta \le 0$ оно решений не имеет. В самом деле, поскольку $\sin x < x$ при $x > 0$, то при $\beta \le 0$ на всем интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено неравенство $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta \ge 1$.

Пусть $\beta > 0$. Заметим, что функция $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta - \cos x$ обращается в ноль в тех же точках интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, что и функция

$$f(x) = \sin x \cos^{\gamma} x - x,$$

где $\gamma = -\dfrac{1}{\beta} < 0$.

Изучим поведение $f(x)$ на полуинтервале $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Имеем: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(x) \to +\infty$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$. Далее, $f''(x) = -\sin x \cdot \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = (1+\gamma)^2 \cos^{\gamma} x - \gamma(\gamma-1)\cos^{\gamma-2} x.$$

Заметим, что $\varphi(x)$ имеет на $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ не более одного корня. Найдем знак функции $\varphi(x)$ в окрестности нуля. Функция $\varphi(x)$ положительна в некоторой окрестности точки 0, если

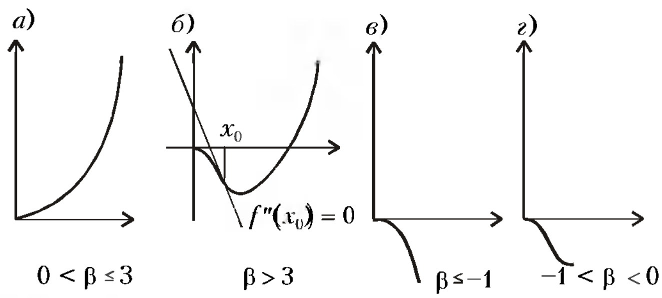
$$\gamma(\gamma-1) < (1+\gamma)^2,$$

$$2\gamma + 1 > -\gamma,$$

$$1 > -3\gamma,\ \beta > 3.$$

Легко видеть, что при $0 < \beta \le 3$ на всем интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\varphi(x) < 0$.

Теперь мы знаем ход изменения функции $f(x)$ на рассматриваемом интервале (рис. *а* и *б*). Тем самым утверждение задачи доказано.



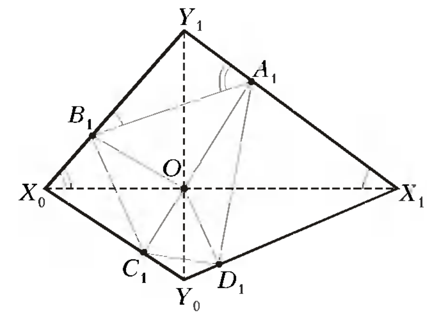
Замечание 1. На рисунках *в* и *г* изображены графики функции $f(x)$ при $\beta < 0$; полезно проследить за изменением вида этого графика при изменении числа β от 0 до $+\infty$, а затем от 0 до $-\infty$.

Замечание 2. На Всесоюзной студенческой олимпиаде 1977 года предлагалась такая задача: «Доказать неравенство $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \ge \cos x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$».

В.Сендеров

М1735*. ***Выпуклый многогранник имеет шесть вершин – по одной на каждой из полуосей прямоугольной системы координат. Докажите, что восемь проекций начала координат на грани многогранника принадлежат одной сфере.***

Пусть три вершины многогранника X_0, Y_0 и Z_0 лежат на отрицательных полуосях, а три другие вершины X_1, Y_1 и Z_1 – на положительных полуосях, точка O – начало координат. Четыре проекции точки O лежат на гранях многогранника $Z_1X_1Y_1$, $Z_1Y_1X_0$, $Z_1X_0Y_0$ и $Z_1Y_0X_1$ – это точки A, B, C и D соответственно. Так как $\angle Z_1AO = \angle Z_1BO = \angle Z_1CO = \angle Z_1DO = 90^\circ$, то сфера S, построенная на Z_1O как на диаметре, содержит точки A, B, C и D.



Докажем, что точки A, B, C и D принадлежат одной окружности, т.е. сечению сферы S. Спроектировав эти точки из точки Z_1 на ребра многогранника X_1Y_1, Y_1X_0, X_0Y_0 и Y_0X_1, получим точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Эта проекция – стереографическая, и как только мы докажем, что A_1, B_1, C_1 и D_1 принадлежат одной окружности, так сразу убедимся, что точки A, B, C и D тоже принадлежат одной окружности.

Заметим, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 – это проекции точки O на стороны четырехугольника $X_1Y_1X_0Y_0$, диагонали которого X_1X_0 и Y_1Y_0 перпендикулярны и пересекаются в точке O (см. рисунок). В треугольнике $X_0Y_1X_1$ отрезок B_1A_1 антипараллелен стороне X_0X_1, т.е. $\angle Y_1B_1A_1 = \angle Y_1X_1X$, а $\angle Y_1A_1B_1 = \angle Y_1X_0X_1$; аналогичные равенства углов получим в треугольниках $Y_1X_0Y_0$, $X_0Y_0X_1$ и $Y_0X_1Y_1$. После этого простой подсчет покажет, что суммы противоположных углов в четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ равны по 180°, т.е. около $A_1B_1C_1D_1$ можно описать окружность. Значит, точки A, B, C и D принадлежат одной окружности, а четырехугольник $ABCD$ является одной из шести граней многогранника M, восемь вершин которого – это восемь проекций точки O на грани исходного многогранника. Все грани многогранника M (кубоида) являются четырехугольниками, около каждого из которых можно описать окружность. Рассмотрим сферу Q, содержащую две окружности, описанные около двух смежных граней многогранника M. Нетрудно убедиться, что сфера Q содержит все вершины многогранника M (имеет место частный случай задачи М456).

В.Произволов

Ф1743. ***На листе бумаги с уменьшением в 10 раз нарисовали траекторию камня, брошенного под углом 45° к поверхности земли со скоростью 20 м/с. По нарисованной кривой ползет с неизменной по величине скоростью 0,02 м/с маленький жучок. Чему равно ускорение жучка в точке, соответствующей вершине траектории камня?***

В верхней точке траектории камня ускорение направлено перпендикулярно скорости камня и равно (как и в остальных точках траектории) ускорению свободного падения g. Тогда

$$g = \frac{(v_0 \cos 45^\circ)^2}{R}, \text{ откуда } R = \frac{(v_0 \cos 45^\circ)^2}{g}.$$

При уменьшении рисунка в 10 раз радиус кривизны траектории в любой ее точке становится в 10 раз меньше, ускорение жучка всюду перпендикулярно его скорости $\vec{u}$ (эта скорость не меняется по модулю), поэтому в интересующей нас точке траектории ускорение жучка равно

$$a = \frac{u^2}{r} = \frac{10u^2}{R} = \frac{10u^2 g}{(v_0 \cos 45^\circ)^2} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{м/с}^2.$$

З.Рафаилов

Ф1744. *В глубинах космоса летает очень большой сосуд, в котором хаотически движутся маленькие стальные шарики, половина которых имеет диаметр d, а половина – диаметр $2d$. Шарики упруго сталкиваются между собой и со стенками сосуда, потерь энергии при этом нет. Какие удары происходят чаще – маленьких шариков о маленькие или больших шариков о большие? Во сколько раз?*

Содержимое сосуда очень напоминает «обычный» идеальный газ – для такого газа можно считать, что средние кинетические энергии тяжелых и легких «молекул» одинаковы. При этом скорости их движения различаются – шарики диаметром $2d$ имеют массу в 8 раз большую, поэтому их средние квадратичные скорости в $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ раза меньше. Площадь поперечного сечения у такого шарика в 4 раза больше, чем у маленького. Теперь можно оценить частоту ударов.

Пусть шарик летит со скоростью v в течение интервала времени Δt. Объем, в котором находятся «стукнутые» им шарики, пропорционален площади его поперечного сечения S, скорости движения и длительности интервала времени. (Изменения направления движения при ударах для нас несущественны – шарики располагаются в сосуде хаотически, и нам безразлично, где происходят удары. Правда, это справедливо, только если длина свободного пробега существенно больше размера шариков – иначе объем «заметаемого» пространства около точки удара было бы трудно посчитать.) При малой концентрации шариков числа ударов одинаковых шариков друг о друга пропорциональны «заметаемым» объемам, т.е. $Sv\Delta t$. Для больших шариков такой объем получается в $\sqrt{2}$ раз больше, чем для маленьких: $S_б = 4S_м$, $v_б = v_м/\sqrt{8}$, поэтому большие шарики сталкиваются между собой чаще в $\sqrt{2}$ раз.

А.Зильберман

Ф1745. *В очень большом сосуде находится гелий при температуре $T_0 = 1000$ К и давлении $p_0 = 0{,}1$ Па. Откачанный до глубокого вакуума сосуд объемом $V = 1$ л находится внутри большого сосуда. В стенке маленького сосуда открывается клапан площадью $S = 1$ мм^2, а через время $\tau = 0{,}01$ с он закрывается. Оцените давление и температуру внутри маленького сосуда после того, как в нем все успокоится. Стенки маленького сосуда очень тонкие, но их теплопроводность совсем мала.*

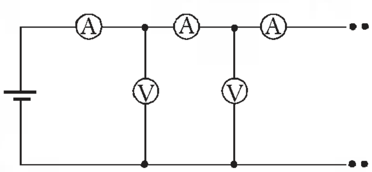
Для начала оценим длину свободного пробега молекул в большом сосуде. Концентрация молекул $n = p/(kT) \approx 10^{19}\ 1/\text{м}^3$ (оценки будем делать грубые – точные расчеты в этой задаче получаются плохо...). Принимая диаметр молекулы гелия равным $d = 2\cdot10^{-10}$ м, для длины свободного пробега получим $\lambda = 1/(\pi d^2 n) \approx 1$ м. При такой большой величине длины свободного пробега молекулы влетают в сосуд практически не соударяясь между собой, и работа окружающего газа над влетающими порциями отсутствует. Казалось бы, энергия молекул внутри сосуда должна быть равна среднему значению снаружи, однако доля быстрых молекул среди влетающих в сосуд заметно выше, чем снаружи, – быстрые молекулы за заданное время влетают в сосуд с бóльших расстояний, чем медленные. Расчет тут провести не просто – нужно учитывать долю молекул с определенными скоростями (распределение молекул по скоростям).

Можно сделать такую, например, грубую оценку: будем считать, что влетают в сосуд молекулы со средними энергиями, но быстрые молекулы их «подгоняют». Оценим давление только быстрых молекул как половину полного давления (строго говоря, их вклад выше, но доля быстрых молекул в общем числе невелика). Тогда «добавка» к средней энергии вошедшего в сосуд объема V молекул составит $0{,}5pV = 0{,}5\nu RT$, т.е. можно сказать, что энергия возрастет в $4/3$ раза. Это означает, что температура газа в сосуде окажется в это же число раз больше (самое забавное, что аккуратная оценка дает тот же результат!) и составит $T \approx 1333$ К.

Число влетевших молекул можно оценивать любым способом – через переданный импульс, просто кинематически и т.п., получится примерно 10^{14} молекул. При этом давление в сосуде окажется порядка 0,001 Па. Это существенно меньше давления снаружи, так что обратным потоком молекул из внутреннего сосуда наружу можно пренебречь.

Р.Александров

Ф1746. *К батарейке напряжением $U = 1{,}5$ В подключена очень длинная цепь из множества одинаковых амперметров и такого же количества одинаковых вольтметров (см. рисунок). Каждый из амперметров имеет сопротивление $r = 1$ Ом, сопротивление каждого вольтметра $R = 10$ кОм. Что показывают первый и второй амперметры? Найдите сумму показаний всех амперметров и сумму показаний всех вольтметров в этой цепи.*



Для начала находим обычным способом сопротивление бесконечной цепочки:

$$R_{общ} = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + rR} = 100{,}5\ \text{Ом}.$$

Тогда ток первого амперметра равен

$$I_1 = \frac{U}{R_{общ}} = 14{,}9\ \text{мА}.$$

Первый амперметр с оставшейся частью схемы образует так называемый делитель напряжения: сопротивление «оставшейся» части составляет $R_{общ} - r = 99{,}5$ Ом, тогда после первого звена к остальной цепи будет приложено напряжение $U\cdot 99{,}5/100{,}5 = 0{,}99U$. Следовательно, второй амперметр покажет

$$I_2 = 0{,}99 I_1 = 14{,}8\ \text{мА}.$$

Сумму показаний всех амперметров можно найти совсем простым способом. Действительно, сумма напряжений амперметров равна напряжению батарейки, т.е. 1,5 В, ток амперметра определяется отношением его напряжения к его сопротивлению, тогда сумма токов равна

$$I_{общ} = \frac{1{,}5\ \text{В}}{1\ \text{Ом}} = 1{,}5\ \text{А}.$$

Сумму напряжений всех вольтметров можно найти таким же способом, но можно и проще – сумма токов всех вольтметров равна току первого амперметра, тогда сумма напряжений равна

$$U_{\text{общ}} = I_1 R = 149 \text{ В}.$$

А.Приборов

Ф1747. *Катушка индуктивности подключена параллельно конденсатору, и они присоединены к источнику переменного напряжения. Измеренный в цепи источника ток равен I_1 = 1 А, ток через конденсатор при этом составляет I_2 = 0,8 А. Во сколько раз нужно изменить частоту источника, чтобы наступил резонанс?*

Токи соединенных параллельно катушки индуктивности и конденсатора противофазны; следовательно, ток внешней цепи равен разности токов катушки и конденсатора. Тогда ток катушки составляет 1,8 А. Для наступления резонанса частоту источника нужно изменить так, чтобы ток катушки стал меньше, а ток конденсатора больше и чтобы в итоге эти токи сравнялись. Ясно, что для этого частоту следует увеличить в

$$k = \sqrt{1{,}8/0{,}8} = 1{,}5 \text{ раза}.$$

З.Катушкин

НАШ КАЛЕНДАРЬ

Химерический счет времени и проблема начала тысячелетия

К.ХОЛШЕВНИКОВ

ВСЕ МЫ СЛЫШАЛИ БУРНЫЕ споры о том, когда же начнется третье тысячелетие: в январе 2001-го года или на год раньше? Казалось бы, и спорить не о чем. Так, второй десяток стульев, например, начинается с одиннадцатого стула. Если поставить стулья по 10 в ряд, это станет ясно даже не знающему сложения и вычитания – лишь бы умел считать на пальцах. А далее по аналогии: пятая сотня начинается с 401-го стула, третья тысяча – с 2001-го. Тем не менее, люди с высшим образованием обсуждают эту проблему уже второй год.

То же происходило и на рубеже XIX и XX веков. Почему? Давалось три ответа, точнее – три причины, порождающие недоразумение в вопросе о начале века и тысячелетия.

Ответ первый, аристократический: пропасть невежества бездонна – из 10 человек 9 недоучены.

Люблю ученую аристократию, но с этим ответом не согласен. Невежественный человек ни в чем не сомневается; если чувствует, что чего-либо не знает, спрашивает у начальства. И еще: неужели половина людей с высшим образованием не знает арифметики в масштабе начальной школы?

Нет, первый ответ неверен!

Ответ второй, экономический: там, где пахнет многими миллиардами долларов, нарушаются законы не только арифметики.

Большинство из вас смотрело по телевизору в последнюю новогоднюю ночь, что происходило в мире. Многомиллиардные прибыли получил связанный с туризмом бизнес (гостиницы, рестораны, воздушный, водный, железнодорожный и автомобильный транспорт, пиротехника, группы артистов всех жанров – всего не перечесть). Неужели возможно упустить шанс?

Возражение: но ведь и при правильном счете фирмы получат те же миллиарды, только на год позже. Нет, лучше рубль сегодня, чем два рубля через год – таков закон бизнеса. А главное в другом – фирмы удвоят свой доход! Не сомневайтесь, уже с осени они вспомнят о правильном счете, и следующий Новый год будет отпразднован не менее пышно.

Второй ответ правилен. Но должны быть и другие причины. (Как ни выгодно турфирмам дважды отпраздновать трехсотлетие Петербурга, это им сделать не удастся – праздник начнется и кончится в 2003-ем году.)

Ответ третий, он же «нулевой»: дело в отсутствии нуля!

Начало отсчета долгот – нулевой меридиан, широт – нулевая параллель (экватор). То же с температурами, высотами над уровнем моря и т.д. и т.п. А вот с календарями не так. В каждом календаре тоже есть начало отсчета, но оно не помечено нулем. Так, начала юлианского и григорианского календарей помечены первым января 1-го года. Это действительно осложняет задачу, хотя и не сильно. Разве не ясно, что 2000 лет с этого момента пройдут к первому января 2001-го года?

И все же третий ответ правилен. Однако перечисленные причины не до конца объясняют явление.

Ответ четвертый: дело в химеричности счисления времени.

Напомним, что в греческой мифо-

логии химера – чудовище с головой льва, туловищем козы и хвостом дракона. В современном языке соответствующее прилагательное употребляется в двух смыслах: фантастический (нереальный) и составленный из несовместимых (в крайнем случае совместимых с огромным трудом) элементов. Здесь используется второе значение: в счислении времени перепутаны порядковые и количественные числительные.

Эта четвертая причина, по-моему, является главной, интересной самой по себе и не замечаемой в силу привычки.

Обобщим задачу, перейдя от времени к произвольной одномерной величине.

Начнем с дискретного случая. Рассмотрим конечное упорядоченное множество одинаковых предметов, например выстроенный в линию ряд выбранных молодым поколением бутылок *Pepsi* (рис.1). Условимся, как принято, считать предметы слева направо. Выделенный на рисунке предмет можно обозначить порядковым числительным «третий». Но можно употребить и количественное числительное «три»: столько предметов содержит их подмножество, начинающееся с крайнего левого (этому *началу отсчета* отвечает цифра 1) и кончающееся выделенным. Таким образом, в дискретном случае допустимо употреблять как количественные, так и порядковые числительные – недоразумения не возникает.

Рис.1

Казалось бы, можно и ограничиться конечным множеством: любой прибор характеризуется диапазоном значений и разрешающей способностью, так что может зарегистрировать лишь конечное число значений измеряемой величины. Но не стоит добровольно ложиться на прокрустово ложе – у разных приборов существенно разные диапазоны и, главное, точность стремительно растет с прогрессом науки и техники. Поэтому перейдем к непрерывному случаю.

Рассмотрим упорядоченное множество вещественных чисел, отождествленных с точками оси X. Для наглядности эту ось можно изобразить рельсом на длинном прямолинейном участке (рис.2). Начало отсчета обозначим цифрой 0 и отметим крупными черточками километры, меньшими – гектометры и т.д. Где находится помеченная кружочком точка? Любой железнодорож-

Рис.2

ник скажет: на 2-ом километре. А точнее? На 4-м гектометре 2-го километра. Еще точнее нельзя? На 331-ом метре 2-го километра или просто на 1331-ом метре. И так далее с повышением точности. Любопытно: четвертый гектометр обернулся трехсотым, а не четырехсотым метром, второй километр – тысячным, а не двухтысячным метром!

Как видим, употребление порядковых числительных неудобно. Наличие нуля как начала отсчета скорее ухудшает ситуацию, чем помогает. Ведь близкие к 0 точки слева расположены на нулевом километре! Поэтому в науке и технике безраздельно господствует описание измерения непрерывной величины количественными числительными. В нашем примере выделенная точка имеет координату

$$x = 1 \text{ км } 330 \text{ м } 157 \text{ мм} = 1{,}330157 \text{ км}.$$

Число цифр определяется точностью измерительного прибора.

Вот мы и подошли к главному. «Безраздельность» имеет одно исключение: измерение времени. Посмотрим, как описывается засечка времени какого-либо события. Например, такого: «Молния ударила третьего апреля пятнадцатого года на второй секунде третьей минуты в пятом часу».

• *Порядковые числительные*. Все, как в примере с железнодорожником, только хуже: единицы измерения идут не от крупных к мелким, а в весьма странном, с точки зрения логики, порядке. Если убрать эту несуразность, то следует поставить в соответствие моменту времени t такое порядковое числительное:

t = 15-й год 4-й месяц 3-ий день 5-ый час 3-я минута 2-я секунда.

• *Количественные числительные*. Очевидно, моменту t соответствует такое количественное числительное (для простоты мы увеличили точность в сто раз):

t = 14 лет 3 месяца 2 дня 4 часа 2 минуты 1,33 секунды.

Подобная запись исключает даже возможность появления «Проблемы 2000». Последний глоток первого бокала шампанского после двенадцатого удара часов в самом начале 2000-го года отвечал бы такой засечке времени:

t = 1999 лет 0 месяцев 0 дней 0 часов 0 минут 33 секунды.

Но нормальная форма записи с использованием количественных числительных никогда не употребляется.

• *Смесь порядковых и количественных числительных*. В научном отчете об ударе молнии присутствовало бы примерно такое описание момента:

t = 15.4.3,4 ч 2 мин 1,33 с.

Дикая смесь! Первые три числа отвечают порядковым, последние – количественным числительным. Мы к этому привыкли и не замечаем нелепицы, тем более что она замаскирована. Ставя дату, мы пишем 03.04.15 вместо 3-го дня 4-го месяца 15-го года.

Ученым все равно, что ставить в соответствие моменту t. На правильность дат исторических событий, а тем более на продолжительность времени между событиями, способ записи не влияет. Так что главные виновники в проблеме начала века – физики и астрономы, использующие химерическую запись отсчетов времени.

Не повезло этой величине! Посмотрите, сколько неудобств:

1) Если метр – он и в Африке метр, то годы во всех календарях имеют разную продолжительность: 1999-ый год содержал 365 суток, а 2000-ый – 366 суток в григорианском и юлианском календарях. Такова плата за желание иметь целое число суток в году и встречать Новый год в полночь. А ведь без этого можно обойтись. В астрономии наряду с обычными календарями используют непрерывный счет дней (юлианские даты – в честь предложившего их Юлия Цезаря Скалигера) и *не связанный с сутками* счет лет (бесселевы годы – в честь известного астронома и математика Фридриха Бесселя).

Во всех календарях неодинакова и продолжительность разных месяцев.

2) Вместо принятого всюду десятичного деления сутки дробят на 24 часа, час – на 60 минут, минуту – на 60 секунд. А далее употребляют десятичные доли секунды (опять химера!).

3) На Земле, очень маленькой, люди могли бы жить по единому времени, но живут по поясному, передвигая стрелки часов туда-сюда при путешествиях. Такова плата за желание иметь полдень около 12 часов. Кстати, это желание попрано декретным временем. Когда летом по радио в 12 часов говорят, что в Петербурге – полдень, хочется возразить: люди могут двигать стрелки, но полдень – не в их власти. И наступает он летом в Петербурге около 14 часов, в Москве около 13,5 часа.

Но уже появились люди, живущие по единому времени: космонавты на орбите.

4) Только засечки времени отмечаются противоестественной смесью порядковых и количественных числительных, а начало отсчета помечено цифрой 1.

В заключение – вопрос: перейдут ли когда-либо на нормальную форму записи отсчетов времени? Думаю, что нет – астрономы трепетно блюдут традиции. Но все же я не отрицаю такой возможности. На моей памяти за какие-нибудь 50 лет произошел существенный сдвиг в бытовом счислении времени от ординалов к кардиналам. Раньше говорили: *четверть десятого*, а теперь: *9 часов 15 минут*. В определении возраста сдвиг произошел еще раньше. Полтораста лет назад говорили: *пошел седьмой год*, реже: *шестой миновал*, а теперь: *исполнилось шесть лет*. К радости прекрасного пола: все же приятнее, когда тебе 39 лет, а не сороковой год, еще приятнее, когда тебе 41 год, а не пятый десяток лет.

Счастливой вам встречи третьего тысячелетия!

Задачи

1. *Космический криптарифм.* В математическом примере зашифровано слово из десяти разных букв, которое обозначает название космического корабля будущего. Определите числовое значение каждой буквы, затем напишите последовательно цифры от 0 до 9, а под ними – соответствующие им буквы, и вы прочтете искомое слово.

```
_Н. ЕБО  | П. ЛАНЕТА
 А ЕОСПЕ | АУ
 ------
_Л ППОСО
  СУБОЛО
  ------
   ЛСНЕЕ
```

Ю.Аленков

2. Два четырехзначных числа A и B написаны одними цифрами, но в разном порядке. Может ли сумма цифр числа A равняться сумме цифр числа $A + B$?

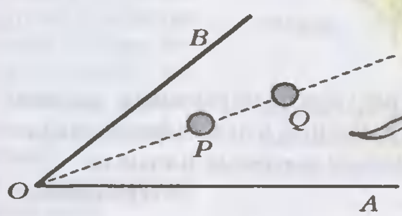
Д.Калинин

3. Имеются четыре палочки. Известно, что из них можно сложить четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Докажите, что из них можно сложить четырехугольник с двумя прямыми углами.

Л.Смирнов

4. В остром угле AOB между двумя стенками геометрического бильярда расположены два шара P и Q на одном луче, проходящем через точку O. Если шар P ударить так, что он, отскочив последовательно от стенок AO и BO, столкнется с шаром Q, то пройденное им расстояние будет таким же, как если его ударить так, что он, отскочив последовательно от стенок BO и AO, столкнется с шаром Q. Докажите это.

В.Произволов



5. В пробирке находились бактерии и вирусы общей численностью 2000 штук. Сначала каждая бактерия убила по три вируса, затем каждый оставшийся вирус уничтожил по две бактерии, после чего опять каждая оставшаяся бактерия убила по три вируса... Такой «обмен ударами» продолжался до тех пор, пока бактерий и вирусов не оказалось поровну. Сколько же их осталось?

И.Акулич

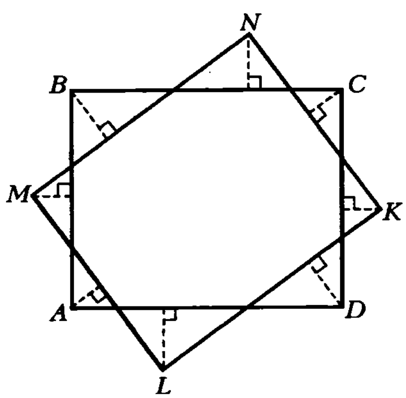
Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков.

11. Два выпуклых четырехугольника $ABCD$ и $MNKL$ расположены так, что в пересечении дают восьмиугольник. Все восемь высот в треугольниках, окаймляющих



восьмиугольник (см. рисунок), опущенных на его стороны, одинаковы. Докажите, что четырехугольники имеют равные периметры и равные площади.

В.Произволов

12. Имеется клетчатый бумажный квадрат со стороной 1111 клеток. Его требуется прямолинейными разрезами разделить на единичные квадратики, причем перед каждым очередным разрезом имеющиеся части разрешается как угодно перекладывать (не перегибая) и за один прием разрезать сразу несколько частей. Какое наименьшее число разрезов потребуется для разделения квадрата на единичные квадратики?

И.Акулич

13. Нефтяная компания решила установить автозаправочные колонки на перекрестках города, который имеет 162 отрезка улиц, соединяющих перекрестки. Решено было устанавливать не более одной колонки на двух соседних перекрестках. Известно, что в городе на каждом перекрестке сходится не менее четырех улиц. Докажите, что при этих условиях компания не сможет установить более 40 колонок.

О.Мельников

14. а) Докажите, что для любого n-разрядного натурального числа A существует натуральное m-разрядное число B такое, что $m \ge n$ и сумма цифр произведения AB равна $9m$.

б) Докажите, что существуют 10 последовательных натуральных чисел таких, что

сумма цифр первого числа равна 2000;
сумма цифр второго числа равна 2001;
…
сумма цифр десятого числа равна 2009,

причем каждое из этих чисел делится на сумму своих цифр.

В.Замков

15. Труляля и Траляля задумали по два натуральных числа. Оказалось, что сумма чисел, задуманных Труляля, равна произведению чисел, задуманных Траляля, а сумма чисел, задуманных Траляля, равна произведению чисел, задуманных Труляля. Какие числа могли задумать Труляля и Траляля?

А.Жуков

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Две задачки

Чему равно значение выражения:

1. $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-z)$;

2. $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\ldots\sin\omega$?

Ответы

1. 0, так как $x - x = 0$.
2. 0, так как $\sin\pi = 0$.

Как линейкой измерить длину волны лазерного излучения?

В.МОЖАЕВ

Судя по названию статьи ясно, что речь будет идти о волновых свойствах света. Волновые представления используются при описании таких хорошо известных физических явлений, как интерференция и дифракция света. С этими явлениями тесно связано очень важное понятие когерентности волн.

Пусть в некоторую точку пространства от двух источников приходят два монохроматических волновых возмущения с одинаковой длиной волны λ. Если источник *1* находится на расстоянии r_1 от точки наблюдения, а источник *2* – на расстоянии r_2, то зависимость, например для электромагнитной волны, напряженности электрического поля в данной точке, создаваемой обеими электромагнитными волнами, будет иметь вид

$$E(t) = E_{01}\cos(\omega t - kr_1) + E_{02}\cos(\omega t - kr_2),$$

где E_{01} и E_{02} – амплитуды напряженностей электромагнитных волн, $\omega = 2\pi c/\lambda$ – их круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число (считаем, что начальные фазы волн совпадают). Происходит сложение двух колебаний, сдвинутых по фазе на величину $\Delta\varphi = (\omega t - kr_1) - (\omega t - kr_2) = k(r_2 - r_1)$. Два колебания считаются когерентными, если за время наблюдения разность фаз $\Delta\varphi$ остается постоянной. В этом случае амплитуда E_0 результирующего колебания зависит от $\Delta\varphi$ и остается неизменной за время наблюдения:

$$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\Delta\varphi}.$$

К сожалению, монохроматическая волна – это чисто математическое понятие, такие волны не имеют физического смысла, их нет в природе. (Наиболее близкие к монохроматическим волны излучают оптические квантовые генераторы, т.е. лазеры.) Нет в природе и когерентных источников, т.е. источников, излучающих когерентные волны. В различных оптических схемах для получения интерференционной картины в качестве когерентных источников обычно используют два мнимых источника, полученных от одного действительного, или один действительный, а другой – его мнимое изображение.

А теперь перейдем к рассмотрению конкретных оптических схем.

Задача 1. *Любую оптическую схему по наблюдению интерференционной картины можно представить в упрощенном виде, изображенном на рисунке 1. Два точечных когерентных источника S_1 и S_2, излучающих свет с длиной волны λ, находятся на расстоянии d друг от друга. На расстоянии L от источников расположен экран. Определите ширину интерференционных полос при условии, что $d \ll L$.*

Очевидно, что интерференционная картина в плоскости рисунка 2 симметрична относительно начала координат ($z = 0$).

Пусть координата m-го максимума интенсивности равна z_m. Это означает, что в точку с координатой z_m от источников S_1 и S_2 приходят волны с оптической разностью хода, равной $m\lambda$, где m – некоторое целое число, т.е.

$$r_2 - r_1 = m\lambda.$$

Из рисунка 2 находим

$$r_2 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} + z_m\right)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{L^2 + \left(z_m - \frac{d}{2}\right)^2}.$$

С учетом того, что $d/2 + z_m \ll L$, можно записать

$$r_2 = L\sqrt{1 + \left(\frac{d/2 + z_m}{L}\right)^2} \approx L + \frac{(d/2 + z_m)^2}{2L},$$

$$r_1 = L\sqrt{1 + \left(\frac{z_m - d/2}{L}\right)^2} \approx L + \frac{(z_m - d/2)^2}{2L},$$

откуда

$$r_2 - r_1 \approx \frac{dz_m}{L}.$$

В этом приближении условие того, что максимуму m-го порядка соответствует координата z_m, имеет вид

$$\frac{dz_m}{L} = m\lambda.$$

Аналогично, для соседнего максимума $(m+1)$-го порядка запишем

$$\frac{dz_{m+1}}{L} = (m+1)\lambda,$$

где z_{m+1} – координата максимума $(m+1)$-го порядка.

Ширина интерференционных полос Δx – это расстояние между двумя соседними максимумами, т.е.

$$\Delta x = z_{m+1} - z_m = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{\psi},$$

где $\psi = d/L$ – угол сходимости интерферирующих лучей.

Приведем без вывода точное выражение для ширины интерференционных полос:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin(\psi/2)}.$$

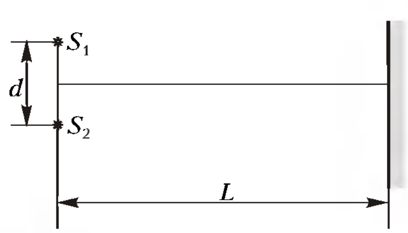


Рис. 1

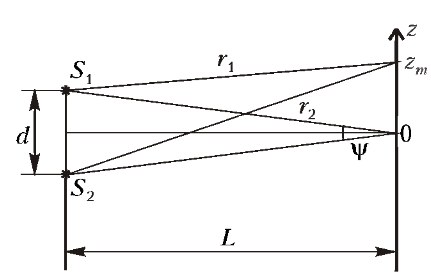


Рис. 2

(Окончание см. на с. 34)

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Шар и сфера

Шар состоит из точек, удаленных от данной точки (центра) не более чем на данное расстояние (радиус). Сфера — это граница шара. Поскольку расстояние от начала координат до точки $(x; y; z)$ равно $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то сфера радиуса r с центром в начале координат задана уравнением

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

а шар — неравенством

$$x^2+y^2+z^2\le r^2.$$

Объем шара радиуса r равен $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$. Зная это, легко найти площадь сферы. Для этого рассмотрим шар с тем же центром и радиусом $r+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Разность объемов равна

$$\frac{4}{3}\pi\left((r+\varepsilon)^3-r^3\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\left(3r^2\varepsilon+3r\varepsilon^2+\varepsilon^3\right).$$

Но тот же самый объем при маленьких ε с довольно высокой точностью равен εS, где S — площадь сферы (по сути это определение площади поверхности). Значит,

$$S=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2=4\pi r^2.$$

Архимед доказал, что любые две плоскости, параллельные основаниям описанного около сферы цилиндра (рис.1), высекают на сфере и на цилиндре «пояски» одинаковой площади. (В частности, площадь всей сферы равна площади боковой поверхности цилиндра $2r\cdot 2\pi r=4\pi r^2$.)

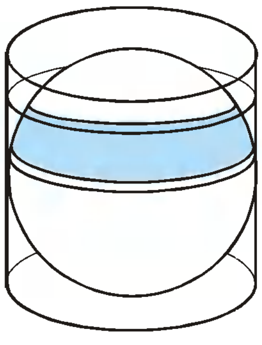


Рис. 1

Трехгранный угол с вершиной в центре сферы высекает на ней сферический треугольник (рис.2).

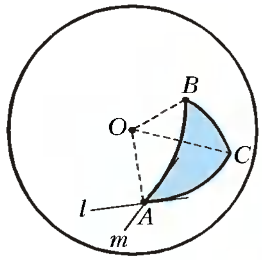


Рис. 2

Стороны сферического треугольника — дуги больших кругов. Поскольку касательные l и m к сфере перпендикулярны радиусу OA, то величины $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ углов сферического треугольника равны величинам соответствующих двугранных углов трехгранного угла.

«Двуугольник» D_A (рис.3) составляет от площади сферы такую же часть, как угол $2\hat{A}$ от угла 2π. Поэтому его площадь

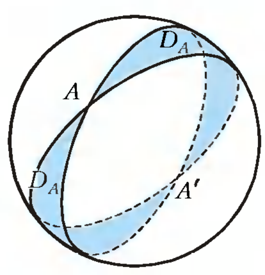


Рис. 3

равна

$$\frac{2\hat{A}}{2\pi}\cdot 4\pi r^2=4r^2\hat{A}.$$

Теперь продолжим стороны AB, BC и CA сферического треугольника до больших кругов (рис.4). Очевидно, двуугольники D_A, D_B и D_C покрывают сферический треугольник ABC и симметричный ему треугольник $A'B'C'$ в три слоя, а остальную часть сферы — в один слой. Поэтому

$$4r^2\hat{A}+4r^2\hat{B}+4r^2\hat{C}=$$

$$=4\pi r^2+2S_{ABC}+2S_{A'B'C'},$$

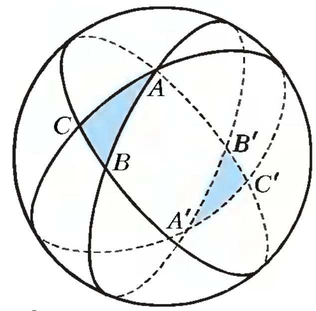


Рис. 4

где $S_{ABC}=S_{A'B'C'}$. Следовательно,

$$S_{ABC}=\left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi\right)r^2.$$

В частности, сумма углов любого сферического треугольника больше 180°.

В любой тетраэдр можно единственным способом вписать сферу, причем имеет место формула для объема тетраэдра $ABCD$:

$$V=\frac{1}{3}\left(S_{ABC}+S_{ABD}+S_{ACD}+S_{BCD}\right)r,$$

где r – радиус вписанной сферы. Существуют также 4 вневписанные сферы, каждая из которых касается одной грани тетраэдра и продолжений трех других граней, при этом

$$V=\frac{1}{3}\left(S_{ABC}+S_{ABD}+S_{ACD}-S_{BCD}\right)r_a,$$

где r_a – радиус сферы, касающейся грани BCD и продолжений трех других граней. Существуют ли еще сферы, которые касаются всех четырех плоскостей граней тетраэдра? Ответ зависит от площадей этих граней. Если существует сфера с центром O и радиусом ρ, касающаяся «продолжений за ребро» граней ABC и ABD и «продолжений за вершины» A и B граней ACD и BCD (рис.5), то объем V равен

$$V_{ACDO}+V_{BCDO}-V_{ABCO}-V_{ABDO}=$$

$$=\frac{1}{3}\rho\left(S_{ACD}+S_{BCD}-S_{ABC}-S_{ABD}\right).$$

Необходимым условием для этого

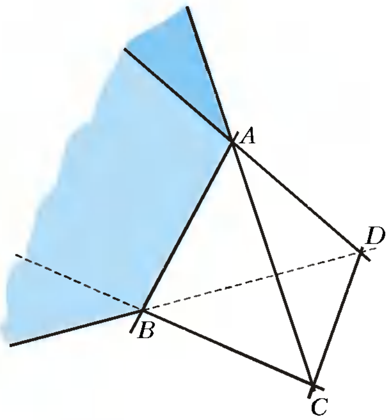


Рис. 5

является неравенство

$$S_{ACD} + S_{BCD} > S_{ABC} + S_{ABD}.$$

Можно доказать, что это условие не только необходимое, но и достаточное. В частности, если сумма площадей никаких двух граней тетраэдра не равна сумме площадей двух других граней, то существуют 1 + 4 + 3 = 8 сфер, каждая из которых касается всех четырех плоскостей граней тетраэдра. А для равногранного тетраэдра таких сфер всего 1 + 3 = 4.

Как расположить на сфере n точек, чтобы наименьшее из всех расстояний между ними было как можно больше? Эта задача не решена до сих пор. Оптимальные расположения при n = 2, 3, ..., 9 показаны на рисунке 6, где линиями соединены те точки, расстояния между которыми равны наименьшему из растояний между рассматриваемыми n точками. При $n > 9$ решение известно для n = 12 (вершины икосаэдра) и n = 24 (вершины полуправильного 38-гранника, ограниченного 32 равносторонними треугольниками и 6 квадратами; в каждой вершине сходятся 4 треугольника и 1 квадрат).

Другая похожая задача — как расположить на непроводящей электричество сфере n одинаковых зарядов. Отталкиваясь, они стараются «разбежаться в разные стороны», чтобы минимизировать потенциальную энергию системы. При n = 2, 3, 4, 6 и 12 ответы найдены: это, соответственно, 2 противоположные точки сферы, 3 вершины вписанного в большой круг сферы равностороннего треугольника, 4 вершины правильного тетраэдра, 6 вершин октаэдра и 12 вершин икосаэдра. В общем случае решение неизвестно.

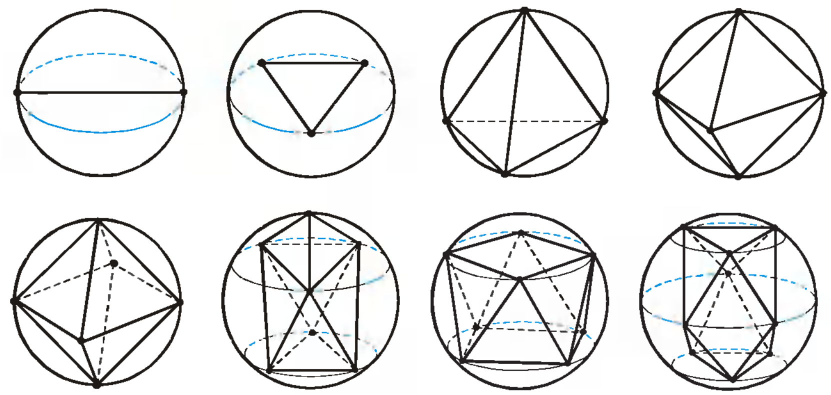


Рис. 6

Рассмотрим куб размером 3×3×3. Отметим центры всех 12 единичных кубиков, которые выходят на поверхность куба двумя своими гранями (т.е. не являются ни угловыми, ни центральными на гранях). Поскольку все эти 12 точек удалены от центра куба на расстояние $\sqrt{2}$, то сферы радиуса $1/\sqrt{2}$ с центрами в них касаются центрального шара (рис.7).

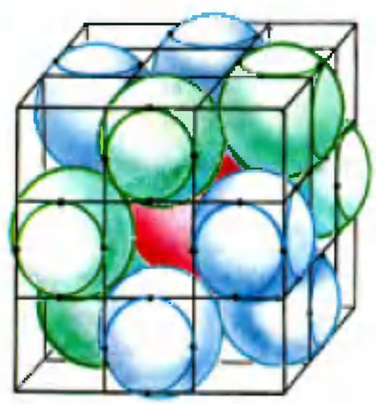


Рис. 7

Можно ли расположить 13 одинаковых шаров, чтобы все они касались одного шара того же радиуса? Джеймс Грегори (1638–1675) надеялся, что можно. Исаак Ньютон (1643–1727) утверждал, что нельзя. Точку в их споре поставили в 1953 году К.Шютте и Б.Л.Ван-дер-Варден. Прав оказался Ньютон.

Возьмем все точки пространства с целыми координатами и отметим те из них, сумма координат которых четна (рис.8). Рассмотрим шары радиуса $1/\sqrt{2}$ с центрами в отмеченных точках. Доля объема, которую занимают эти шары, равна $\pi/\sqrt{18} \approx 0{,}7405$. Иоганн Кеплер в 1611 году выдвинул гипотезу, что это — наиболее плотная возможная упаковка шаров. Задача о плотной упаковке шаров вошла (под номером 18) и в список наиболее важных проблем математики XX века, составленный в 1900 году Давидом Гильбертом. В 1998 году вышла серия из шести статей Хайеса и Фергюсона, где при помощи весьма сложных рассуждений задача сведена к рассмотрению примерно 5000

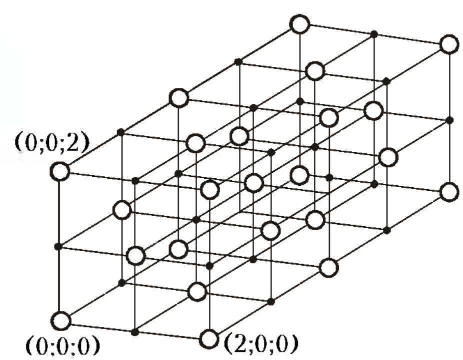


Рис. 8

конфигураций, которое было выполнено на компьютере. Окончательную проверку эти вычисления и рассуждения еще не прошли, и можно ожидать всяких сюрпризов.

А.Жуков, А.Спивак

(Начало см. на с. 31)

При малых углах сходимости оно переходит в полученное ранее приближенное выражение.

Задача 2. *От двух когерентных источников света S_1 и S_2 получена система интерференционных полос на экране AB, удаленном от источников на a = 2 м (рис.3). Расстояние между источниками $d \ll a$. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием F = 25 см? Рассмотрите два случая: расстояние линзы от источников равно 2F; источники находятся в фокальной плоскости линзы.*

Решение этой задачи будем основывать на выражении, полученном для ширины интерференционных полос в предыдущей задаче.

В отсутствие линзы угол сходимости интерферирующих лучей ψ мал и ширина интерференционных полос

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda a}{d}.$$

Если собирающая линза расположена на расстоянии $2F$ от источников, когерентными источниками, создающими на экране AB интерференционную картину, являются два действительных изображения S_1' и S_2' (рис.4). Очевидно, что расстояние между этими источниками также равно d, а угол сходимости равен $\psi_1 = d/(a-4F)$. Ширина интерференционных полос в

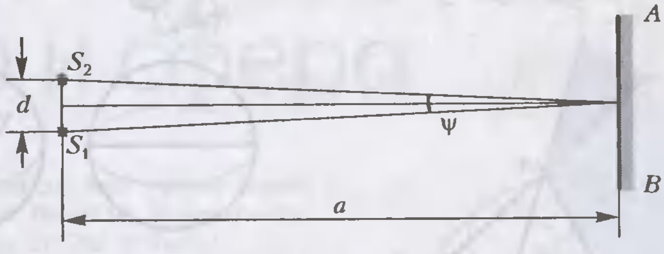


Рис. 3

этом случае будет

$$\Delta x_1 = \frac{\lambda}{\psi_1} = \frac{\lambda(a-4F)}{d},$$

а отношение ширин полос –

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x} = \frac{a-4F}{a} = \frac{1}{2},$$

т.е. ширина полос уменьшится в два раза.

Если источники S_1 и S_2 будут находиться в фокальной плоскости линзы, когерентные источники S_1' и S_2' будут мнимыми и расположенными на бесконечности слева от линзы на продолжении прямых S_1O и S_2O (рис.5). На экран AB будут падать два параллельных пучка лучей с углом сходимости $\psi_2 = d/F$. Ширина интерференционных полос будет

$$\Delta x_2 = \frac{\lambda}{\psi_2} = \frac{\lambda F}{d},$$

а отношение ширин полос –

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x} = \frac{F}{a} = \frac{1}{8},$$

т.е. в этом случае ширина полос уменьшится в 8 раз.

Задача 3. *В интерференционной схеме используется квазимонохроматический источник света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Отражающие зеркала расположены симметрично относительно источника S и экрана Э, на котором наблюдается интерференционная картина (рис.6). Найдите: 1) ширину интерференционных полос Δx на экране; 2) область локализации полос на экране; 3) максимальный и минимальный порядки интерференции и число наблюдаемых полос. Параметры схемы: L = 1 м, 2d = 2,5 см, D = 10 см.*

1) В данной интерференционной схеме когерентными источниками являются два мнимых изображения источника S в отражающих зеркалах. На рисунке 7 это источники S' и S''. Угол сходимости интерферирующих лучей равен углу $S'OS''$ и составляет

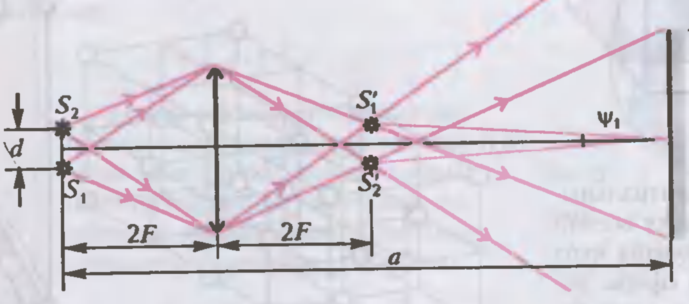


Рис. 4

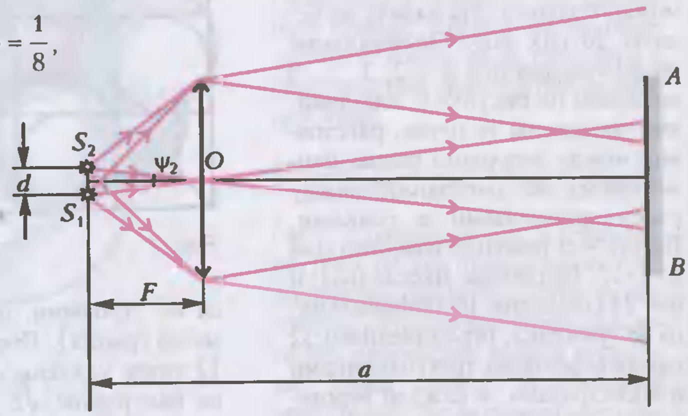


Рис. 5

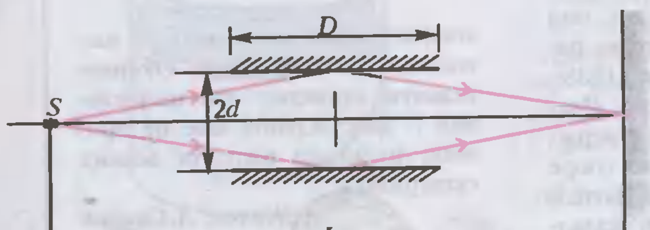


Рис. 6

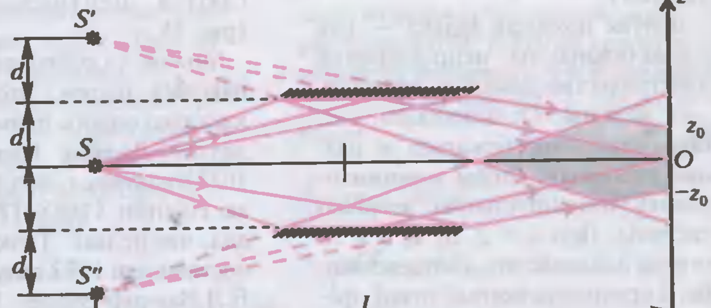


Рис. 7

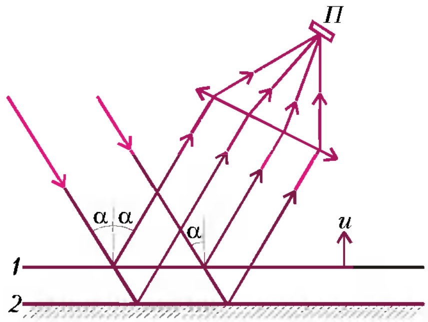


Рис. 8

$\psi = 4d/L$. Ширина интерференционных полос равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda L}{4d} = 10^{-3}\ \text{см}.$$

2) Область локализации полос на экране определяется областью пересечения интерферирующих пучков:

$$|z| \le z_0,\ \text{где}\ z_0 = \frac{2dD}{L+D} = 0{,}227\ \text{см}.$$

3) Интерференционная картина на экране будет симметричной относительно начала координат ($z = 0$). Непосредственно в начале координат будет находится максимум нулевого порядка ($m = 0$) – это и будет минимальный порядок интерференции. Максимальный же порядок интерференции будет иметь место при $z = \pm z_0$:

$$m_{\max} = \frac{z_0}{\Delta x} = \frac{8d^2 D}{\lambda L(L+D)} = 227.$$

Полное число наблюдаемых полос будет

$$N = 2m_{\max} = 454.$$

Задача 4. *Параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает под углом $\alpha = 30°$ на систему из двух плоскопараллельных зеркал 1 и 2 (рис.8). Часть светового пучка отражается от полупрозрачного зеркала 1, а оставшаяся часть полностью отражается от неподвижного зеркала 2. Система волн, отраженных от обоих зеркал, с помощью собирающей линзы фокусируется на приемник П, который расположен в фокальной плоскости линзы. Сигнал приемника пропорционален интенсивности падающего на него света. Какова будет частота переменного сигнала приемника в случае плоскопараллельного перемещения зеркала 1 со скоростью $u = 0{,}01$ см/с?*

Рассмотрим произвольный момент времени. Пусть координата зеркала 1

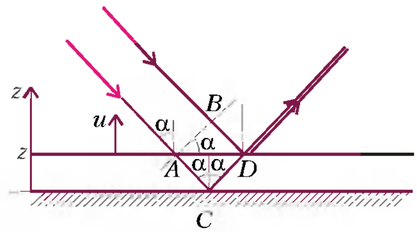


Рис. 9

относительно зеркала 2 равна z (рис.9). Найдем в этот момент оптическую разность хода Δ между двумя волнами, одна из которых – отраженная от зеркала 1, а другая – отраженная от зеркала 2 и прошедшая зеркало 1. Прямая AB является волновым фронтом (линией постоянной фазы) падающей волны в некоторый произвольный момент времени. Расстояние этого фронта до точки D, где произойдет отражение, равно отрезку BD, а расстояние, которое нужно пройти этому фронту до точки D после отражения от зеркала 2, равно сумме длин отрезков AC и CD. Очевидно, что оптическая разность хода между волнами равна

$$\Delta = AC + CD - BD.$$

Из рисунка 9 находим

$$AC = CD = \frac{z}{\cos\alpha},$$

$$BD = AD\sin\alpha = 2z\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha = \frac{2z\sin^2\alpha}{\cos\alpha},$$

откуда

$$\Delta = \frac{2z}{\cos\alpha} - \frac{2z\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = 2z\cos\alpha.$$

Приемник будет регистрировать максимальный сигнал, когда

$$2z\cos\alpha = m\lambda,\ \text{где}\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Между двумя соседними максимумами сигнала зеркало 1 пройдет рассто-

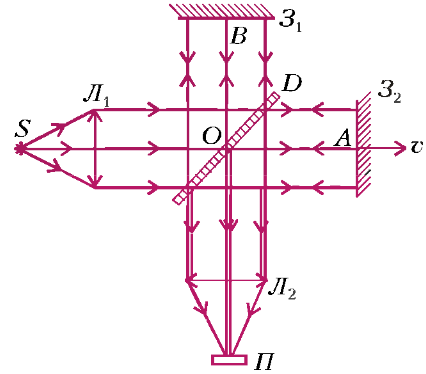


Рис. 10

яние $\delta z = \lambda/(2\cos\alpha)$. Время прохождения зеркалом 1 этого расстояния, или период переменного сигнала приемника, будет

$$T = \frac{\delta z}{u} = \frac{\lambda}{2u\cos\alpha},$$

а частота сигнала –

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2u\cos\alpha}{\lambda} = 346\ \text{Гц}.$$

Задача 5*. *Для исследования спектрального состава излучения источника используется интерферометр Майкельсона (рис.10). Точечный источник S расположен в фокальной плоскости линзы $Л_1$. Слаборасходящийся пучок света разделяется делителем D на два одинаковых по интенсивности пучка. Один из них (отраженный от делителя) направляется на неподвижное зеркало $З_1$, а второй после прохода делителя идет к зеркалу $З_2$, которое перемещается со скоростью $v = 6\cdot10^{-5}$ мм/с. После отражения от зеркал и последующего взаимодействия с делителем образуются два когерентных пучка, которые с помощью линзы $Л_2$ собираются на фотоприемник П. Ток фотоприемника пропорционален интенсивности падающего на него излучения. На рисунке 11 показан график изменения фототока приемника, когда излучение источника содержит две близкие спектральные линии одинаковой интенсивности с длинами волн λ_1 и λ_2 ($\lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_1$). Определите значения этих длин волн.*

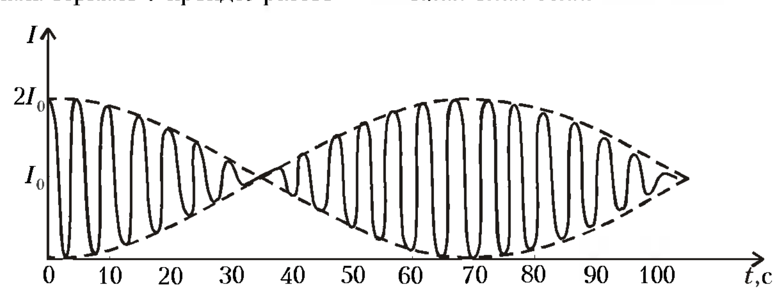


Рис. 11

Рассмотрим квазимонохроматическое излучение с длиной волны λ_1. Пусть интенсивность этого излучения равна I_0. Очевидно, что интенсивность каждого из двух когерентных пучков, фокусируемых линзой $Л_2$ на фотоприемник, равна $I_0/4$. Если в данный момент времени длины плеч интерферометра (расстояния от делителя до зеркал) равны OA и OB, то разность хода между нашими двумя волнами составляет $\delta = 2(OA - OB)$, где множитель «2» учитывает распространение волны к зеркалу и обратно, фазовый сдвиг равен $\Delta\varphi = 2\pi\delta/\lambda_1$, суммарная интенсивность этих волн равна

$$I_1(t) = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} + 2\frac{\sqrt{I_0}}{2}\frac{\sqrt{I_0}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta\right) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta\right)\right).$$

Введем обозначения: $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\bar{\lambda}$, откуда $\lambda_1 = \bar{\lambda} - \Delta\lambda/2$, $\lambda_2 = \bar{\lambda} + \Delta\lambda/2$, где $\bar{\lambda}$ – средняя длина волны. После подстановки выражения для λ_1 суммарная интенсивность $I_1(t)$ будет

$$I_1(t) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda} - \Delta\lambda/2}\right)\right) \approx$$

$$\approx \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}} + \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right) \pm$$

$$- \frac{I_0}{2}\sin\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right).$$

Аналогично, для излучения с длиной волны λ_2 получим

$$I_2(t) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda} + \Delta\lambda/2}\right)\right) \approx$$

$$\approx \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}} \pm \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right) +$$

$$+ \frac{I_0}{2}\sin\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\sin\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right).$$

Суммарная интенсивность света на приемнике от излучений с обеими длинами волн будет

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) = = I_0 + I_0\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\bar{\lambda}}\right)\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right).$$

Первый переменный сомножитель во втором члене этого выражения описывает высокочастотное периодическое колебание фототока, а второй сомножитель соответствует низкочастотной огибающей. По графику зависимости $I(t)$ находим, что период высокочастотных колебаний равен $T = 5$ с. За это время разность хода δ изменяется на $\bar{\lambda}$, что соответствует перемещению подвижного зеркала на $\bar{\lambda}/2$. Расстояние, пройденное зеркалом за время T, очевидно, равно Tv. Таким образом,

$$\frac{\bar{\lambda}}{2} = Tv, \text{ откуда}$$

$$\bar{\lambda} = 2Tv = 6\cdot10^{-5}\ \text{см} = 600\ \text{нм}.$$

Как мы уже отмечали, функция $\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}\right)$ описывает огибающую высокочастотного сигнала. Из рисунка 11 можно найти, что за время, равное $14T$, фаза изменяется на π, а разность хода – на $\bar{\lambda}^2/\Delta\lambda$. Подвижное зеркало проходит за это время в два раза меньшее расстояние. Итак,

$$\frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda} = 14Tv, \text{ откуда}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\bar{\lambda}^2}{28Tv} \approx 43\ \text{нм}.$$

Таким образом, длины волн спектральных линий равны, соответственно,

$$\lambda_1 = \bar{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{2} = 578.5\ \text{нм},$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2} = 621{,}5\ \text{нм}.$$

Задача 6. *На физической олимпиаде, проходившей в Московском физико-техническом институте в 1998 году, школьникам была предложена такая экспериментальная задача: с помощью штангенциркуля измерить длину волны лазерного излучения. В качестве лазера использовался миниатюрный твердотельный квантовый генератор. Один из участников олимпиады собрал экспериментальную установку, изображенную на рисунке 12. На горизонтальной поверхности стола, примыкающего к вертикальной стене комнаты, лежит штангенциркуль Ш. Излучение лазера Л, укрепленного на штативе, падает поперек миллиметровым рискам штангенциркуля. На миллиметровой бумаге, закрепленной на стене, наблюдается система дифракционных максимумов в виде светлых горизонтальных линий. Были проведены три замера: высота самой яркой линии (луч 1) $h_0 = 31$ мм, высота шестого дифракционного максимума (луч 2) $h_6 = 68$ мм и расстояние $L = 695$ мм. По этим данным определите длину волны лазерного излучения.*

Идея решения задачи понятна: использовать штангенциркуль с нанесенными на нем миллиметровыми рисками в качестве отражательной дифракционной решетки. Диаметр светового пучка лазера на расстоянии 1 м составляет ~4 мм, поэтому для увеличения числа рисок, освещаемых падающим пучком света, угол падения φ_0 должен быть близок к $\pi/2$.

Рассмотрим ход лучей, рассеянных на двух соседних рисках (рис.13). Расстояние между соседними штрихами (постоянная решетки) $d = 1$ мм. Обозначим угол падения лучей *1* и *2* через φ_0, а угол отражения лучей *1'* и *2'* – через φ_m, и пусть угол φ_m соответствует направлению на m-й дифракционный максимум. Разность хода лучей *1,1'* и *2,2'* равна

$$\Delta = d\sin\varphi_0 - d\sin\varphi_m.$$

Если угол φ_m соответствует направлению на m-й главный дифракционный максимум, то $\Delta = m\lambda$, где λ – длина волны света. Таким образом,

$$d\sin\varphi_0 - d\sin\varphi_m = m\lambda,$$

где $m = 0, 1, 2\ldots$

Очевидно, что направление на максимум нулевого порядка ($m = 0$) имеет место при $\varphi_m = \varphi_0$, т.е. когда происходит зеркальное отражение. Если высота расположения максимума h_0, то

$$\sin\varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h_0^2}}.$$

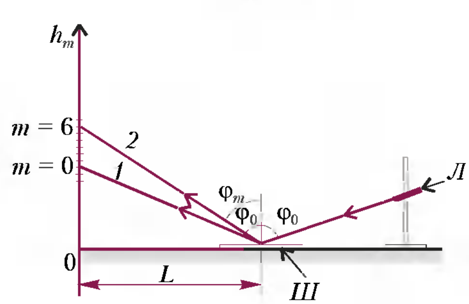


Рис. 12

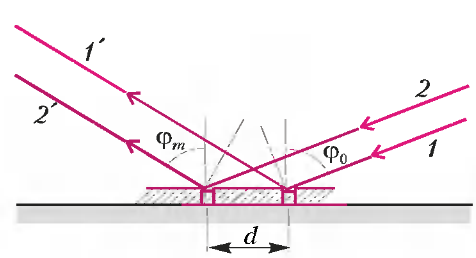


Рис. 13

Для высоты расположения максимума шестого порядка ($m = 6$)

$$\sin\varphi_6 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h_6^2}}.$$

Условие направления на главные дифракционные максимумы позволяет определить длину волны света:

$$\lambda = \frac{dL}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + h_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + h_6^2}}\right).$$

Поскольку h_0 и h_6 много меньше L, можно записать

$$\lambda \approx \frac{d(h_6 - h_0)(h_6 + h_0)}{12L^2} = 632\ \text{нм}.$$

С учетом погрешностей измерений окончательно получим

$$\lambda = (630 \pm 50)\ \text{нм}.$$

Упражнения

1. Из линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см вырезана центральная часть шириной a, как показано на рисунке 14. Обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения. По одну сторону линзы помещен точечный источник света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. С противоположной стороны линзы находится экран, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними светлыми полосами равно $\Delta x = 0{,}5$ мм и не изменяется при перемещении экрана вдоль оптической оси. Найдите a.

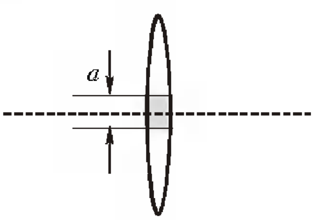


Рис. 14

2. В интерференционной схеме, изображенной на рисунке 15, на бипризму Френеля падает параллельный пучок квазимонохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Пучки света, преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. При каком расстоянии L между бипризмой и экраном P на нем будет наблюдаться интерференционная картина максимального размера? Чему будет при этом равна ширина интерференционных полос? Какое количество светлых полос будет наблюдаться на экране в этом случае? Расстояние между вершинами бипризмы $2a = 5$ см, показатель преломления материала бипризмы $n = 1{,}5$, преломляющий угол $\alpha = 10^{-3}$ рад. Считать, что $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha$.

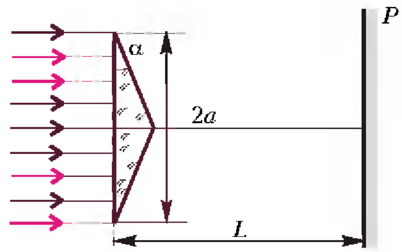


Рис. 15

3. Интерферометр Рэлея (рис.16) используется для относительного измерения показателя преломления газов. Для этого на пути одного из интерферирующих лучей располагается кювета $Г$ прямоугольной формы длиной $L = 10$ см с исследуемым газом, а на пути другого луча – компенсатор K, с помощью которого добиваются, чтобы в центральном максимуме разность хода между лучами равнялась нулю. Чему равно относительное изменение показателя преломления азота, по отношению к воздуху, если после замены в кювете воздуха на азот интерференционная картина в плоскости наблюдения P сместилась ровно на одну полосу? Измерения проводились на длине волны $\lambda = 500$ нм.

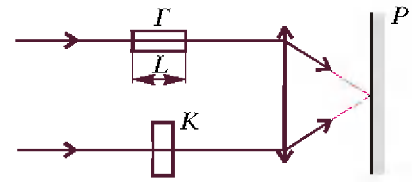


Рис. 16

4. Точечный источник света S расположен на расстоянии $L = 1$ м от тонкой слюдяной пластинки толщиной $h = 0{,}1$ мм с показателем преломления $n = 1{,}4$ (рис.17). На таком же расстоянии от пластинки расположен небольшой экран $Э$, ориентированный перпендикулярно отраженным лучам, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Угол $\varphi = 60°$. Найдите порядок m интерференционной полосы в центре экрана. Определите ширину интерференционных полос. Длина волны света $\lambda = 560$ нм.

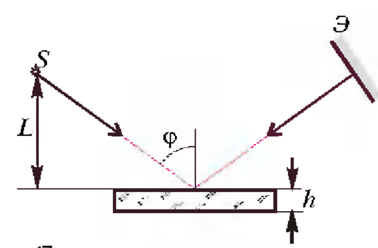


Рис. 17

Задачи о трапециях

В.АЛЕКСЕЕВ, В.ГАЛКИН, В.ПАНФЕРОВ, В.ТАРАСОВ

Среди задач о многоугольниках на вступительных экзаменах в вузы важную долю составляют задачи о трапециях.

Здесь мы обсудим основные подходы к решению таких задач.

Подобие и пропорциональность в трапециях

Важной особенностью трапеций является наличие двух параллельных сторон. При пересечении их (или их продолжений) любой прямой образуются равные углы, что приводит к появлению пар подобных треугольников и, соответственно, пропорциональных отрезков. Также (в соответствии с теоремой Фалеса) пропорциональные отрезки возникают на боковых сторонах трапеции или их продолжениях, если проводится прямая, параллельная основаниям. Следующие задачи показывают, как использовать эти пропорциональности.

Задача 1. *Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает ее боковые стороны и диагонали последовательно в точках M, P, Q, N (рис.1). Докажите, что MP = QN.*

Решение (обозначения см. на рис.

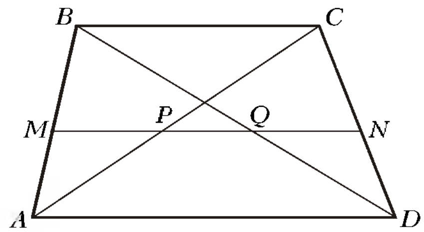


Рис. 1

1). Так как $MN \| BC$, то $\Delta AMP \sim \Delta ABC$, $\Delta DQN \sim \Delta DBC$ и $AM : AB = DN : DC$. Поэтому $\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} = \frac{QN}{BC}$. Отсюда $MP = QN$.

Задача 2. *В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ через точку O пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Эта прямая пересекает боковые стороны в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.*

Решение (см. рис.2). Так же, как в задаче 1, получаем, что $MO = ON$. Так как $BC \| AD$, то $\Delta OBC \sim \Delta ODA$ (из

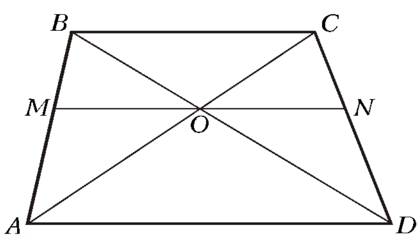


Рис. 2

равенства углов). Отсюда $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{b}{a}$ и $\frac{BO}{BD} = \frac{b}{a+b}$. Так как $MN \| AD$, то $\Delta BMO \sim \Delta BAD$. Поэтому $\frac{MO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{b}{a+b}$ и $MO = \frac{b}{a+b} AD = \frac{ab}{a+b}$. Поскольку $MO = ON$, то $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Ответ: $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Следующая задача выражает очень важное утверждение о трапециях.

Задача 3. *Докажите, что середины оснований, точка O пересечения диагоналей и точка F пересечения боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.*

Решение. Пусть прямая FO пересекает основания трапеции в точках M и N (рис.3). Так как $\Delta FBM \sim \Delta FAN$, $\Delta FMC \sim \Delta FND$, $\Delta OBM \sim \Delta ODN$, $\Delta OMC \sim \Delta ONA$, то $\frac{BM}{AN} = \frac{FM}{FN} =$

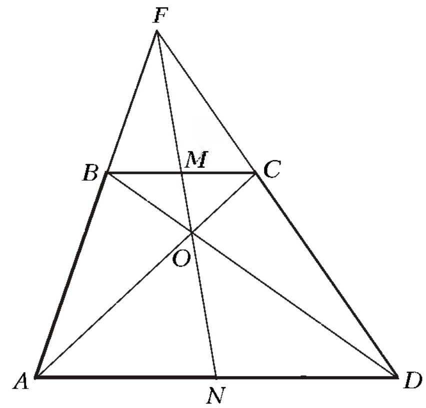


Рис. 3

$= \frac{MC}{ND}$ и $\frac{BM}{ND} = \frac{MO}{ON} = \frac{MC}{AN}$. Отсюда $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$ и $\frac{BM}{MC} = \frac{ND}{AN}$. Тогда $\frac{AN}{ND} = \frac{ND}{AN}$, и $AN = ND$. Но тогда и $BM = MC$.

Дополнительные построения в трапециях

Обычно трудности у школьников вызывает выбор тех дополнительных построений, которые помогают решить задачу. Для трапеции имеется ряд стандартных дополнительных построений. Отметим те, которые наиболее часто используются при решении задач: 1) опускание высот из концов одного основания на другое основание; 2) проведение через вершины трапеции прямой, параллельной боковой стороне, не содержащей эту вершину; 3) проведение через середину меньшего основания прямых, параллельных боковым сторонам; 4) проведение через вершину трапеции прямой, параллельной диагонали, не содержащей эту вершину; 5) продолжение боковых сторон до пересечения.

Дополнительное построение 1) позволяет разбить трапецию на прямоугольник (стороны которого – одно из оснований и высота трапеции) и 2 прямоугольных треугольника (в которых один из катетов – высота трапеции, а гипотенузы – боковые стороны трапеции). Это часто позволяет произвести нужные вычисления.

Дополнительное построение 2) порождает параллелограмм и треугольник. Это достроение полезно, когда в образовавшемся треугольнике удается получить 3 параметра.

Задача 4. *Постройте трапецию $ABCD$ ($BC \| AD$) по четырем сторонам $AB = c$, $AD = b$, $BC = a$, $CD = d$ ($a < b$) и найдите ее высоту.*

Решение. Допустим, что искомая трапеция $ABCD$ построена. Проведем

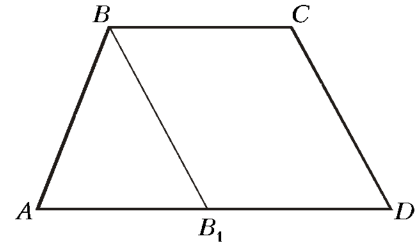


Рис. 4

$BB_1 \| CD$ (рис.4). Получим треугольник ABB_1 с известными сторонами $AB = c$, $BB_1 = CD = d$, $AB_1 = b - a$. Таким образом, по данным задачи можно построить треугольник ABB_1, на луче AB_1 отложить отрезок $AD = b$, через точку B провести прямую, параллельную AD, и отложить на ней отрезок $BC = a$ (в нужную сторону). Высота h трапеции находится, например, из формулы $S = \frac{h(b-a)}{2}$ для площади треугольника ABB_1, где площадь треугольника предварительно вычисляется по формуле Герона.

Ответ:

$$h = \frac{2}{b-a}\sqrt{p(p-c)(p-d)(p-b+a)},$$

где $p = \frac{1}{2}(c + d + b - a)$.

Указанное построение заставляет «работать» боковые стороны, соединив их вместе в треугольнике ABB_1. Дополнительное построение 3) очень близко к 2) и порождает такой же треугольник.

Задача 5. *В трапеции сумма углов при одном из оснований равна 90°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований, если длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна d.*

Решение. Пусть в данной трапеции основания AD и BC ($AD > BC$) и пусть

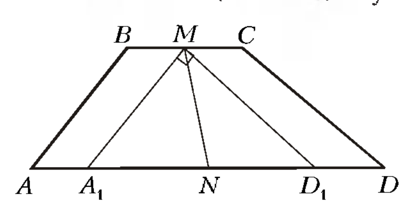


Рис. 5

M – середина стороны BC, N – середина стороны AD. Требуется найти длину MN (рис.5). Проведем из точки M прямые параллельно боковым сторонам до пересечения с основанием AD в точках A_1 и D_1. Тогда сумма углов MA_1D_1 и MD_1A_1 равна 90°, т.е. треугольник MA_1D_1 является прямоугольным. Имеем $AA_1 = BM$ и $D_1D = MC$, поэтому $AA_1 = D_1D$ и $A_1N = ND_1$. Таким образом, MN – медиана

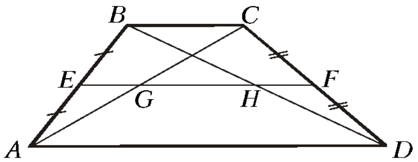


Рис. 6

в прямоугольном треугольнике MA_1D_1, которая, как известно, равна половине гипотенузы A_1D_1. Поскольку $AA_1 = BM$ и $D_1D = MC$, то $A_1D_1 = AD - BC$ и $MN = \frac{A_1D_1}{2} = \frac{AD-BC}{2}$. С другой стороны, пусть EF – средняя линия трапеции (E на AB), и пусть она пересекает диагонали AC и BD в точках G и H (рис.6). Тогда EF параллельна основаниям и поэтому EH – средняя линия в треугольнике ABD, а EG – средняя линия в треугольнике ABC. Поэтому $GH = EH - EG = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2}$. В результате получаем $MN = GH = d$.

Ответ: d.

В тех случаях, когда заданы диагонали трапеции или угол между ними, бывает полезно дополнительное построение 4), порождающее треугольник, в котором 2 стороны равны и параллельны диагоналям трапеции, а длина третьей стороны равна сумме длин оснований трапеции.

Задача 6. *Постройте трапецию $ABCD$ ($DC \| AB$) по двум ее основаниям $DC = a$, $AB = b$ ($a < b$) и двум диагоналям $AC = d_1$, $BD = d_2$.*

Решение. Допустим, что искомая трапеция $ABCD$ построена. Проведем

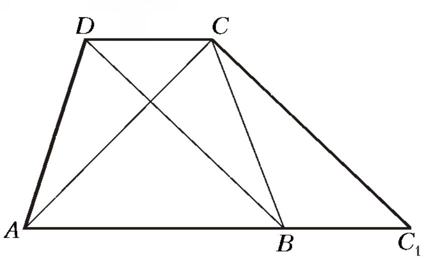


Рис. 7

$CC_1 \| DB$ (рис.7). Получим треугольник ACC_1 с известными сторонами $AC = d_1$, $CC_1 = d_2$, $AC_1 = a + b$. Таким образом, по данным задачи можно построить треугольник ACC_1, на AC_1 отложить отрезок $AB = b$, через точку C провести прямую, параллельную AB, и отложить на ней отрезок $DC = a$ (в нужную сторону).

Указанное дополнительное построение заставляет «работать» обе диагонали, соединив их вместе в треугольнике ACC_1.

Дополнительное построение 5) позволяет сводить задачу о трапеции к задаче о треугольниках.

Задача 7 (МГУ, мехмат, 1999 г.). *В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.*

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK – сторону BC?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

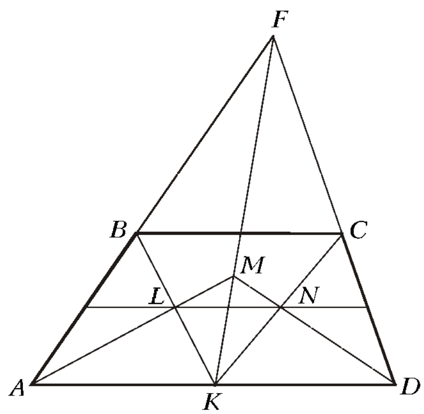


Рис. 8

Решение (см. рис. 8). Так как сумма углов трапеции при боковой стороне AB равна 180° и AM и BK – биссектрисы этих углов, то $\angle LAB + \angle LBA = 90°$. Таким образом, в треугольнике ABK биссектриса AL является высотой. Поэтому $AK = KB = 9$. Аналогично, $KD = CD = 5$. При этом $BL = LK$, $CN = NK$, поэтому LN – средняя линия в треугольнике KBC, а ее продолжение – средняя линия в треугольнике ABK. Значит, LN делит AB в отношении 1 : 1. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке F. Тогда M – точка пересечения биссектрис в треугольнике AFD и FM – третья биссектриса в этом треугольнике. Пусть продолжение FM пересекает AD в точке K_1. Тогда по теореме о биссектрисе $\frac{AK_1}{K_1D} = \frac{AF}{FD} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{5}$. Отсюда следует, что K_1 совпадает с K, т.е. FK проходит через M. При этом легко получить, что прямая MK (или FK) делит сторону BC в том же отношении, что и сторону AD, т.е. 9 : 5. Так как $\angle KLM = \angle KNM = 90°$, то точки K, L, M, N лежат на одной окружности (с диаметром MK). Тогда $\angle MKN = \angle MLN$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Но $LN \| BC$, поэтому $\angle MLN = \angle MAK$. Таким образом, $\angle MKN = \angle MAK$ и $\Delta NKM \sim \Delta LAK$ (так как $\angle MNK = \angle ALK = 90°$). Аналогично, $\Delta LKM \sim \Delta NDK$. Поэтому $\frac{MK}{AK} = \frac{MN}{LK}$ и $\frac{MK}{KD} = \frac{ML}{KN} = \frac{3}{7}$. Отсюда $MK = \frac{3}{7}KD = \frac{15}{7}$ и $\frac{MN}{LK} = \frac{15}{7} : 9 = \frac{5}{21}$.

Ответ: а) 1 : 1, 9 : 5; б) 5 : 21.

Трапеции и площадь

Наличие параллельных сторон в трапеции порождает ряд интересных свойств, связанных с площадями.

Задача 8. *Диагонали трапеции рассекают ее на 4 треугольника. а) Докажите, что треугольники, примыкающие к боковым сторонам, имеют равную площадь. б) Пусть площади треугольников, примыкающих к основаниям, равным S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.*

Решение (см. рис. 9). а) Так как $BC \| AD$, то высоты в треугольниках ABD и ACD, опущенные на их общее

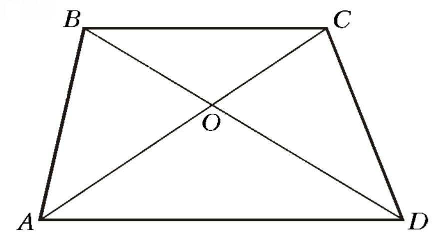


Рис. 9

основание AD, равны. Поэтому равны площади треугольников ABD и ACD. Так как эти треугольники имеют общую часть AOD, то равны также площади треугольников ABO и CDO.

б) Пусть площади треугольников ABO и CDO равны S_3 и S_4. Тогда $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ (докажите, что это равенство справедливо в любом выпуклом четырехугольнике, воспользовавшись тем, что $\sin\angle AOB = \sin\angle BOC = \sin\angle COD = \sin\angle DOA$). В п. а) мы доказали, что $S_3 = S_4$. Поэтому $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1S_2}$. Отсюда площадь трапеции равна $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Ответ: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Имеется ряд важных связей площади с дополнительными построениями в трапеции. Так, например, при продолжении боковых сторон образуются подобные треугольники, площади которых относятся как квадраты соответствующих сторон.

Задача 9. *На боковых сторонах AB и CD трапеции ABCD взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям. При этом площадь трапеции MBCN в k раз больше площади трапеции AMND. Найдите длину MN, если BC = a и AD = b.*

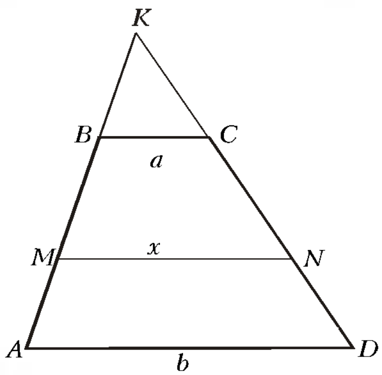


Рис. 10

Решение (см. рис. 10). Пусть длина отрезка $MN = x$ и пусть $a < b$. Продолжим боковые стороны до пересечения в точке K. Получим три подобных треугольника KBC, KMN и KAD с основаниями a, x, b. Для площадей этих подобных треугольников имеем $S_{KBC} : S_{KMN} : S_{KAD} = a^2 : x^2 : b^2$. Так как $S_{BCNM} = S_{KMN} - S_{KBC}$ и $S_{AMND} = S_{KAD} - S_{KMN}$, то $S_{BCNM} : S_{AMND} = \left(x^2 - a^2\right) : \left(b^2 - x^2\right)$. Из условия получаем, что $\frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2} = k$, откуда $x^2 = \frac{a^2 + kb^2}{1+k}$ и $x = \sqrt{\frac{a^2 + kb^2}{1+k}}$. Тот же результат получается и при $a > b$. (При $k = 1$ получаем, что длина отрезка MN, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам, равна $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.)

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 + kb^2}{1+k}}$.

При дополнительном построении 4), когда переносится диагональ, образуется треугольник, площадь которого равна площади трапеции. Это дополнительное построение оказывается ключевым, например, в следующей задаче.

Задача 10 (МГУ, экономический факультет, 1999 г.). *В трапеции ABCD ($AB \| CD$) диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.*

Решение. В трапеции даны диагонали. Чтобы заставить их «работать», сделаем стандартное построение – проведем $CC_1 \| DB$ (см. рис.7). Получим треугольник ACC_1, который равновелик трапеции. Действительно, треугольники ADC и CC_1B имеют одинаковое основание ($DC = BC_1$, так как DCC_1B – параллелограмм) и одинаковую высоту, равную высоте трапеции. Поэтому их площади равны, а значит, равны и площади трапеции $ABCD$ и треугольника ACC_1. В треугольнике ACC_1 известны две стороны $AC = a$, $CC_1 = BD = \frac{7}{5}a$ и соотношение между углами. Действительно, если $\angle CC_1A = \angle DBA = \alpha$, то по условию $\angle CAC_1 = 2\alpha$, значит, $\angle ACC_1 = 180° - 3\alpha$. По теореме синусов $\frac{CC_1}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin\alpha}$. Откуда $2\cos\alpha = \frac{CC_1}{AC} = \frac{7}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{7}{10}$. Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ (синус положителен, так как $\alpha \in \left(0; 180^\circ\right)$). Для угла ACC_1 имеем

$$\sin\angle ACC_1 = \sin\left(180^\circ - 3\alpha\right) = \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \frac{12\sqrt{51}}{125}.$$

Осталось вычислить площадь:

$$S_{\Delta ACC_1} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CC_1\cdot\sin\angle ACC_1 = \frac{42\sqrt{51}a^2}{625}.$$

Ответ: $\frac{42\sqrt{51}a^2}{625}$.

Трапеции и окружности

Если окружность описана около трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$), это означает, что трапеция – равнобочная (это следует из равенства вписанных углов CAD и ACB). При этом прямая, проходящая через центр окружности перпендикулярно основаниям, является осью симметрии трапеции, что обычно можно активно использовать при решении задач. При вычислениях часто удобно использовать теорему синусов, поскольку окружность, описанная около трапеции, описана и около четырех треугольников, вершины которых совпадают с вершинами трапеции. Иногда полезно (как в следующей задаче) связать возникающие вписанные углы с центральными.

Задача 11. *Трапеция ABCD ($AD \| BC$) вписана в окружность с центром O. Докажите, что точки A, B, O и точка M пересечения диагоналей трапеции лежат на одной окружности.*

Решение. Так как центральный угол AOB и вписанный угол ADB опираются на одну дугу, то $\angle AOB = 2\angle ADB$. Поскольку трапеция равнобочная, то $\angle MAD = \angle MDA$ и $\angle AMB = \angle MAD + \angle MDA = 2\angle ADB = \angle AOB$. Отсюда следует, что окружность, проходящая через A, B, O, проходит также и через M.

Если трапеция $ABCD$ описана около окружности, то у нее также имеется ряд хороших свойств: высота равна диаметру окружности; отрезки сторон от вершин до точек касания попарно равны; $AB + CD = AC + BD$ (как и в любом четырехугольнике, описанном около окружности). Другие интересные свойства содержатся в следующей задаче.

Задача 12. *Пусть трапеция ABCD ($AD \| BC$) описана около окружности с центром O. Докажите, что а) средняя линия трапеции равна полусумме ее боковых сторон; б) боковые стороны видны из центра O под прямым углом (т.е. $\angle AOB = \angle COD = 90°$); в) $AM \cdot MB = CN \cdot ND = r^2$, где M и N – точки касания окружности со сторонами AB и CD соответственно и r – радиус окружности.*

Решение. Утверждение а) следует из того, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований и $AB + CD = AC + BD$.

б) Точка O равноудалена от всех сторон трапеции. Поэтому AO, BO, CO, DO – биссектрисы углов A, B, C, D. Так как $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, то $\angle OAB + \angle OBA = 90°$ и $\angle AOB = 90°$. Аналогично, $\angle COD = 90°$.

в) Так как треугольник AOB – прямоугольный и OM – высота в нем, то $AM \cdot MB = OM^2 = r^2$ (по теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике). Аналогично, $CN \cdot ND = ON^2 = r^2$.

Если в задаче имеется трапеция и некоторая окружность, то часто бывает полезно использовать тот факт, что и в трапеции и в окружности возникают равные углы.

Задача 13 (МГУ, мехмат, 1994 г.). *В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что AF = a, AD = b. Найдите EF.*

Решение (см. рис. 11). Угол CEF заключен между хордой EC и касательной EF. Как известно, он равен половине дуги EC, т.е. вписанному

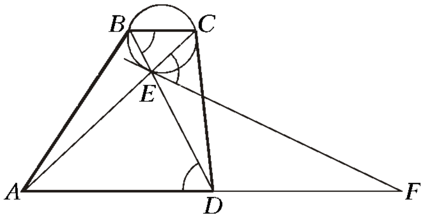


Рис. 11

углу CBE. С другой стороны, в трапеции $\angle CBD = \angle BDA$. Поэтому $\angle CEF = \angle BDA$, откуда $\angle AEF = \angle EDF$. Отсюда следует, что $\Delta FAE \sim \Delta FED$ (у них еще общий угол DFE). Тогда $\frac{EF}{FD} = \frac{AF}{EF}$, и $EF^2 = a(a-b)$. Окончательно, $EF = \sqrt{a(a-b)}$.

Ответ: $EF = \sqrt{a(a-b)}$.

В ряде задач окружность отсутствует в формулировке, но полезна при решении. Важно бывает увидеть саму возможность провести вспомогательную окружность, чтобы получить ключ к решению всей задачи. Эффективность метода вспомогательной окружности подтверждает следующая задача, где оказывается удобным провести сразу две вспомогательные окружности.

Задача 14 (МГУ, физический факультет, 1997 г.). *В трапеции $ABCD$ $BC \| AD$, $\angle ABC = 90°$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD – в точке N. Известно, что $MC = a$, $NB = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.*

Решение. В задаче присутствуют многочисленные перпендикуляры и прямые углы: $BC \perp AB$, $AD \perp AB$, так как трапеция прямоугольная (рис.12); $MN \perp CD$; $DD_1 \perp MC$ и $DD_1 = c$; $AA_1 \perp BN$ и $AA_1 = x$ – искомая величина; $MC = a$, $NB = b$. Имеем: отрезок MC виден из точек B и N под прямым углом. Поэтому около четырехугольника $BCNM$ можно описать окружность S_1. Диаметр ее известен – это отрезок $MC = a$. Из точек B и C окружности ее хорда MN видна под одним углом α (по следствию из теоремы о вписанном угле), т.е. $\angle MBN = \angle MCN = \alpha$.

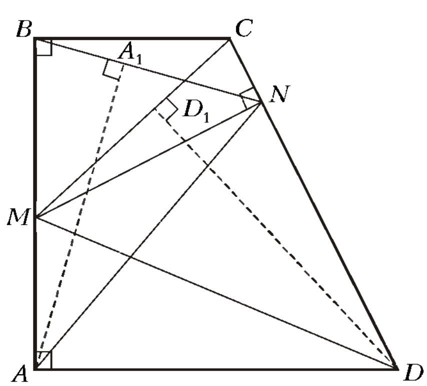


Рис. 12

Отрезок MD виден из точек N и A также под прямым углом. Поэтому около четырехугольника $AMND$ тоже можно описать окружность. Диаметром ее является отрезок MD. Из точек A и D общая хорда двух окружностей (хорда MN) видна под одним углом β: $\angle MAN = \angle MDN = \beta$. В результате имеем два подобных треугольника BAN и CDM (по двум углам). Значит, $\frac{BN}{MC} = \frac{AA_1}{DD_1}$, откуда $AA_1 = x = \frac{BN \cdot DD_1}{MC} = \frac{bc}{a}$.

Ответ: $\frac{bc}{a}$.

Упражнения

1 (МГУ, факультет почвоведения, 1993 г.). Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Определите длины оснований трапеции, если их отношение равно 4.

2. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b.

3. Точка K лежит на основании AD трапеции $ABCD$, причем $AK = \frac{1}{n}AD$. Найдите отношение $AM : MD$, где M – точка пересечения с AD прямой, проходящей через точки пересечения прямых AB и CD и прямых BK и AC. Используя решение этой задачи, предложите способ деления данного отрезка на n равных частей ($n = 1, 2, 3, \ldots$) с помощью одной линейки, если дана прямая, ему параллельная.

4. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка E так, что $AE = BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P соответственно. Известно, что $BO = PD$. Найдите отношение $AD : BC$.

5. В трапеции углы при одном из оснований имеют величины 20° и 70°, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии этой трапеции равна 4.

6. Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые разделили трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Сумма площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции, равна 10. Найдите площадь пятиугольника.

7 (МГУ, биологический факультет, 1991 г.). Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны 8 и 6 соответственно. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC.

8 (МГУ, химический факультет, 1995 г.). Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

9 (МГУ, психологический факультет, 1990 г.). В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, угол CAD равен 60°. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O – точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

10 (МГУ, физический факультет, 1996 г.). В трапеции $BCDE$ ($CD \| BE$) $DE = b$, а расстояние от середины отрезка BC до прямой DE равно d. Найдите площадь трапеции.

11 (ЛГУ, матмех, 1980 г.). Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеции равны a и b ($a > b$)?

12 (МГУ, мехмат, 1995 г.). На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята такая точка M, что $AM : MB = 2 : 3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $CN : DN$, если $BC : AD = 1 : 2$.

13 (МГУ, физический факультет, 1995 г.). Трапеция $ABCD$ ($BC \| AD$) вписана в окружность. Известно, что $BC = a$, $AD = b$, $\angle CAD = \alpha$. Найдите радиус окружности.

14. Около окружности описана равнобочная трапеция $ABCD$. Окружность касается основания трапеции AD в точке P, а боковых сторон AB и CD – в точках M и K соответственно, при этом $MK = 20$. Найдите длину отрезка, который высекают прямые PB и PC из отрезка MK.

15. В трапецию $ABCD$ вписана окружность которая касается боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Найдите площадь трапеции, если $AM = a$, $MB = b$, $CN = c$.

Материалы вступительных экзаменов 2000 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2} + xy = 72, \\ \dfrac{y^4}{x^2} + xy = 9. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin^2 9x}{\sin^2 x} = 16\operatorname{ctg} 2x \sin 10x + \frac{\cos^2 9x}{\cos^2 x}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\left|\log_2(x/2)\right| - 3} \le \frac{1}{\left|\log_8 x^3\right| - 2}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найдите длину отрезка CD, если $\angle ABC = 2\arcsin(1/5)$, а радиус окружности $R = 5$.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\log_{2x}(1 - ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 6, угол между боковыми гранями $\arccos(1/10)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найдите

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{\left|x^2 - 6x + 5\right| - \left|x^2 - 2x - 3\right|} \le 0.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos 5x} + \frac{\sin 3x}{\cos 5x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2^2(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(x+y)\log_{\frac{1}{2}}(x-2y) = \\ = 2\log_2^2(x-2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E, а другая касается C_1 и C_2 и пересекает l в точке F. Найдите радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AB = 4$, $EF = \sqrt{10}$.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x - 9} = 3 - ax - 7a$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADB равен $2\arcsin(1/3)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N – середины отрезков AB, DK, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $3ME = CE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку CM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Монета скользит по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α и в точке C имеет скорость v_0 (рис.1). Через некоторое время монета оказалась в точке D наклонной плоскости, пройдя путь s и поднявшись по вертикали на высоту H. Коэффициент трения скольжения между монетой и наклонной плоскостью μ. Найдите скорость монеты в точке D.

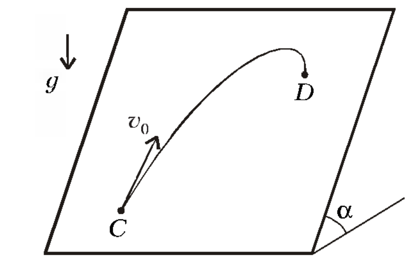


Рис. 1

2. В вертикально расположенной тонкой трубке длиной $3L$ = 840 мм с открытым в атмосферу верхним концом столбик ртути длиной L= 280 мм запирает слой воздуха длиной L. Какой максимальной длины слой ртути можно долить сверху в трубку, чтобы она из трубки не выливалась? Внешнее давление p_0 = 770 мм рт.ст.

3. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырех пластин, удерживаемых на равных расстояниях d друг от друга (рис.2). Пластины *1* и *3* закорочены. Пластины *2* и *4* подсоединены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Определите силу, действующую со стороны электрического поля на пластину *3*. Площадь каждой пластины S, а расстояние между ними много меньше размеров пластин.

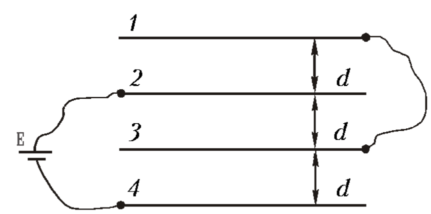


Рис. 2

4. Плоскопараллельная пластина составлена из двух стеклянных клинь-

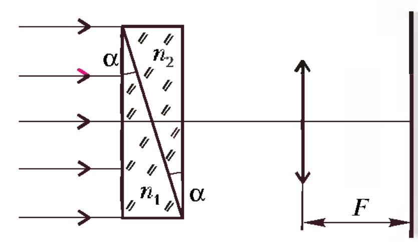


Рис. 3

ев с малым углом $\alpha = 5°$ (рис.3). Показатели преломления клиньев $n_1 = 1{,}48$ и $n_2 = 1{,}68$. На пластину нормально ее поверхности падает параллельный пучок света. За пластиной расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 60$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. На сколько сместится эта точка на экране, если убрать пластину? *Указание*: для малых углов x справедливо соотношение $\sin x \approx x$.

5. Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображенном на рисунке 4, индуктивность катушки быстро (по

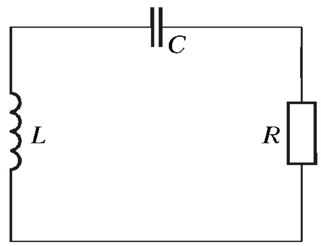


Рис. 4

сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔL ($\Delta L \ll L$) каждый раз, когда ток в цепи равен нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, так же быстро возвращают в исходное состояние. Определите величину ΔL, если $L = 0{,}15$ Гн, $C = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ф, $R = 20$ Ом.

Вариант 2

1. Два шара насажены на прямолинейную горизонтальную спицу и могут скользить по ней без трения (рис.5). К шару массой m прикреплена легкая

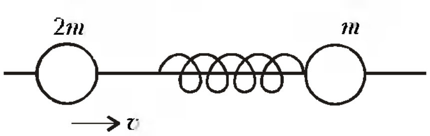


Рис. 5

пружина жесткостью k, и он покоится. Шар массой $2m$ движется со скоростью v. Радиусы шаров много меньше длины пружины. 1) Определите скорость шара массой $2m$ после отрыва от пружины. 2) Определите время контакта шара массой $2m$ с пружиной.

2. В цилиндрическом стакане с водой на нити висит проволока, вмороженная в кусок льда. Лед с проволокой целиком погружен в воду и не касается стенок и дна стакана. После того как лед растаял, проволока осталась висеть на нити целиком погруженная в воду. Уровень воды в стакане за время таяния льда уменьшился на ΔH ($\Delta H > 0$), а сила натяжения нити увеличилась в k раз. Найдите объем проволоки. Плотность воды $\rho_в$, плотность проволоки ρ, площадь внутреннего сечения стакана S.

3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ нагревают при постоянном давлении, переводя его из состояния *1* в состояние *2* (рис.6). При этом газ

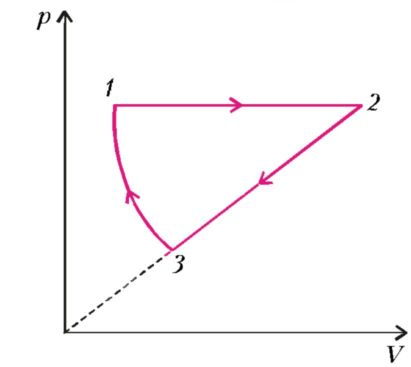


Рис. 6

совершает работу A_{12}. Затем газ сжимается в процессе *2–3*, когда его давление p прямо пропорционально объему V. При этом над газом совершается работа A_{23} ($A_{23} > 0$). Наконец, газ сжимается в адиабатическом процессе *3–1*, возвращаясь в первоначальное состояние. Найдите работу сжатия A_{31}, совершенную над газом в адиабатическом процессе.

4. В схеме, изображенной на рисунке 7, в начальный момент ключ K

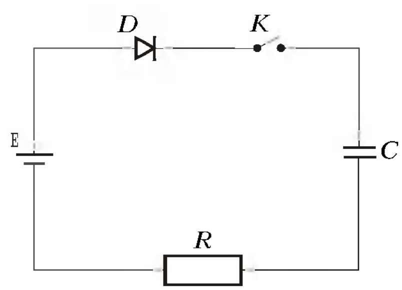


Рис. 7

разомкнут, а конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ не заряжен. Вольт-амперная характеристика диода D

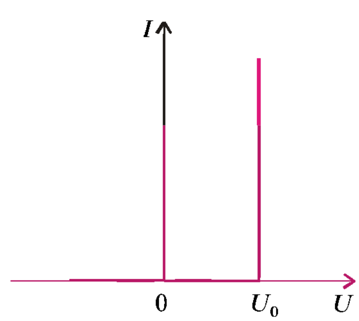


Рис. 8

изображена на рисунке 8. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 6$ В, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В, сопротивление резистора $R = 1$ кОм. 1) Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2) Какой заряд протечет через диод после замыкания ключа? 3) Какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

5. Точечный источник света расположен на главной оптической оси слева от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -10$ см. Расстояние от источника до линзы $d = 40$ см. На расстоянии $L = 20$ см слева от рассеивающей линзы расположена собирающая линза. Главные оптические оси линз совпадают. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если из системы линз выходит параллельный пучок света.

Публикацию подготовили М.Балашов, В.Можаев, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Дана функция $f(x) = \log_{27} x$. Требуется

а) вычислить $f(9\sqrt{3})$;

б) решить неравенство $f(4x+3) < 1$;

в) решить уравнение

$$f(-\sin x) + f(-10\cos x) = \frac{1}{2}.$$

2. Дан треугольник ABC ($AB = 39$; $BC = 15$; $AC = 36$). Найдите

а) высоту, проведенную из вершины C;

б) тангенс половины угла треугольника при вершине A;

в) расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около него окружностей.

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 4^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos 2x} = 14.$$

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны расстояния $AB = 4$, $AD = \sqrt{10}$, $AA_1 = 4$. Вычислите площадь треугольника

A_1BD. Докажите, что плоскости треугольников A_1BD и B_1CD_1 параллельны, и найдите расстояние между ними.

5. Решите уравнение

$$2\cos 2x - 4\sin x + 1 = 0$$

и найдите все значения a, при которых это уравнение равносильно уравнению

$$\log_4(a\cos 2x - a\sin x + 1) - \log_2 \sin x = 1.$$

Вариант 2

(факультеты прикладной математики, экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\frac{2\sqrt{7-2x}}{x+1} \ge \frac{\sqrt{7-2x}}{x-2}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{125}\left(26x^2 + 11x - 1\right) < \log_5(2x+1).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 14\sin^2 x - 9\sin 2x - 4 = 0, \\ 11\cos^2 y - 5\sin 2y - 3 = 0, \\ \sin(x-y) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

4. В основании пирамиды $SABC$ с вершиной S лежит равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = 24$, $AC = 12$); высота пирамиды равна $\sqrt{60}$; боковые грани пирамиды составляют с основанием равные углы. На стороне AC взята точка M так, что $AM = 9$; на стороне BC взята точка N так, что $BN = 18$. Найдите объем пирамиды и определите, в каком отношении делит объем пирамиды плоскость, которая перпендикулярна основанию и проходит через точки M и N.

5. В точке P, лежащей на параболе $y = x^2$, проведена касательная к этой кривой. Перпендикуляр к касательной в точке P пересекает кривую во второй точке Q. Найдите наименьшую длину отрезка PQ.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Три бруска, связанные нитями, движутся горизонтально по шероховатой поверхности под действием приложенной к первому бруску силы, равной F и направленной под углом α к горизонту. Найдите отношение сил натяжения нитей. Массы брусков одинаковы и равны m.

2. Тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v_0, упало на землю с такой же скоростью. С какой скоростью упадет брошенная вверх с той же скоростью подушка, если ее максимальная высота подъема равна $3/4$ от максимальной высоты подъема тела? Силу сопротивления считать постоянной, вращением подушки пренебречь.

3. Небольшой воздушный шарик удерживается в воде на некоторой глубине при температуре $t_1 = 17$ °С. Шарик отпускают, и он начинает всплывать. На поверхности воды, при температуре воздуха $t_2 = 27$ °С, объем шарика увеличивается на 20%. На какой начальной глубине находился шарик? Атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па, плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3.

4. Один моль идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Температуры в точках *2* и *4* равны T_2 и T_4 соответственно. Определите работу, совершаемую газом за цикл, если на диаграмме $p - V$ эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

5. В закрытом сосуде объемом $V = 10$ л содержится смесь воды и ее паров при температуре $t = 100$ °С общей массой $m = 20$ г. Найдите, сколько воды находится в сосуде.

6. Три одинаковых заряда находятся в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника. Найдите работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить заряд из вершины прямого угла, если напряженность поля в этой точке равна E, а катет треугольника равен a.

7. Конденсатор емкостью $C_1 = 600$ нФ зарядили до разности потенциалов $U = 1{,}5$ кВ и отключили от источника питания. Затем к конденсатору присоединили незаряженный конденсатор, имеющий емкость $C_2 = 400$ нФ. Определите энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов.

8. Вентилятор включен в сеть с напряжением $U = 220$ В, по его обмотке течет ток $I = 5{,}0$ А. Если удерживать лопасти вентилятора, не давая им вращаться, то вентилятор начинает греться. При этом выделяется тепловая мощность $P = 2200$ Вт. Найдите КПД вентилятора.

9. При изменении тока со скоростью $\Delta I/\Delta t = 0{,}5$ А/с в катушке индуцируется ЭДС $\mathcal{E} = 2{,}0$ мВ. Найдите емкость конденсатора в контуре, содержащем эту катушку, если контур настроен на длину волны $\lambda = 300{,}0$ м.

10. Два точечных источника света расположены на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $a = 20{,}0$ см друг от друга. Линза находится между источниками на расстоянии $d = 6{,}0$ см от одного из них. Изображения обоих источников оказались в одной точке. Найдите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовили Г.Померанцева, В.Тонян

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Два туриста одновременно вышли из городов A и B навстречу друг другу. После встречи на трассе первый турист затратил 6 часов на оставшийся путь до города B, а второй турист затратил 2 часа 40 минут на оставшийся путь до города A. Найдите время в пути второго туриста.

2. Решите уравнение

$$\frac{1 - 0{,}5\sin 2x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\cos^2 x}}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x\left(\frac{1}{\log_4\left(3 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4\right)}\right) \le 1.$$

4. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - \left|6 + x - x^2\right|$ на промежутке $[-4;4]$.

5. Правильная треугольная пирамида со стороной основания 4 и высотой 2 пересечена плоскостью, параллельной боковой грани и проходящей через середину высоты пирамиды. Найдите площадь сечения.

Вариант 2

(математический факультет)

1. Два поезда одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Первый поезд прибыл в пункт B через 4 часа после встречи поездов на трассе, второй поезд прибыл в пункт A через 9 часов после встречи. Найдите время в пути первого поезда.

2. Решите уравнение

$$\frac{1 + \sin x}{1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}} + 2\,\frac{1 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = 3.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{0,5}\left(\frac{1}{1+\log_{\frac{1}{3}} x-\log_3 x}\right)\le 1.$$

4. Найдите наименьшее значение функции $y=x^3-\left|3{,}75+x-x^2\right|$ на промежутке $[-3;3]$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра A_1B_1, точка P – середина ребра BC. Найдите угол между плоскостями AMP и ABC.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Развертка боковой поверхности цилиндра является прямоугольником, диагональ которого равна d и составляет с основанием этого прямоугольника угол α. Найдите объем цилиндра.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}3x=0.$$

3. Решите уравнение

$$\log_2(x-1)+\log_2 x=1.$$

4. Решите неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0.$$

5. Исследуйте на максимум и минимум функцию

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-4.$$

Вариант 4

(химический факультет)

1. Найдите площадь трапеции с основаниями 16 и 44 и боковыми сторонами 17 и 25.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 x+\cos^2 2x=1.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+3}\ge\sqrt{3}.$$

4. Решите уравнение

$$2^{2x-3}-3\cdot 2^{x-2}+1=0.$$

5. Найдите точки экстремума функции

$$y=\frac{x^2}{x+1}.$$

Задачи устного экзамена
(математический факультет)

1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64},\\ \sqrt{x^2}\le 25.\end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$3^{2-2|x+1|}+8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+1|-1}=9.$$

3. Решите неравенство

$$x+3\le\sqrt{(1-x)^2}+\sqrt{(x-2)^2}.$$

4. При каких значениях q минимум функции

$$y=qx^2+2qx-2q^2-1$$

равен (-2)?

5. Найдите все значения q, при которых неравенство

$$2(q-1)x+3q-x^2<13$$

выполняется при всех $x\le -1$.

6. Вычислите

$$\log_{\sqrt{x}}\left(y\cdot x^{\frac{1}{3}}\right)+\log_{y^{\frac{1}{3}}}\frac{x}{y},$$

если

$$\log_{y^2x^{-1}}\left(yx^2\right)=\frac{11}{7}.$$

7. Вычислите $x_1^4x_2+x_1x_2^4$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+1{,}5x-2=0$.

8. Вычислите

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha-\sin 3\alpha-\sin\alpha},$$

если $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$.

9. Решите уравнение

$$\frac{1{,}5}{\sin x\sin 3x+2\cos 2x}=1.$$

10. Сколько критических точек функции

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$$

расположено на интервале $(-2\pi;\pi)$?

11. Постройте график функции

$$y=\sqrt{x^2+2\sqrt{5}x+5}+\sqrt{x^2-2\sqrt{5}x+5}.$$

12. Постройте график функции

$$y=0{,}5\left|\log_3 x^2\right|-3.$$

13. Постройте график функции

$$y=\sin x\left|\operatorname{ctg}x\right|+1.$$

14. В сектор круга с центральным углом $\alpha=60^\circ$ вписан круг площади $S=9$. Найдите площадь сектора.

15. Объем конуса $V=1024\sqrt{\pi}$, площадь его осевого сечения $S=192$. Найдите длину образующей конуса.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Какой груз нужно положить на плоскую льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду? Площадь льдины 5 м^2, ее толщина 20 см; плотность льда 0,9 г/см^3.

2. Пуля массой 10 г, выпущенная под углом α к горизонту, в верхней точке имеет кинетическую энергию 400 Дж. Определите угол α, если начальная скорость пули 500 м/с.

3. Лифт из состояния покоя поднимается равноускоренно и через 3 с оказывается на высоте 15 м. Найдите вес груза массой 40 кг во время подъема в лифте. Какая работа совершается при подъеме груза на эту высоту?

4. Нить, к которой прикреплен груз массой 0,3 кг, отклоняют от вертикали на угол 90° и отпускают. Найдите силу натяжения нити при прохождении грузом положения равновесия.

5. Газ находится под поршнем цилиндра при температуре 27 °С и давлении $2\cdot 10^5$ Па. Какую работу совершат 2,5 л газа при изобарном расширении, если начальную температуру повысить до 127 °С?

6. В электрическом чайнике мощностью 400 Вт можно вскипятить 1 л воды при начальной температуре 20 °С за 15 мин. Найдите КПД чайника. Удельная теплоемкость воды $4{,}2\cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

7. Два одинаковых металлических шарика заряжены разноименными зарядами так, что абсолютная величина заряда одного из них в 5 раз больше другого. Шарики приводят в соприкосновение и затем раздвигают на прежнее расстояние. Во сколько раз при этом изменится сила взаимодействия шариков?

8. Конденсатор емкостью C зарядили до напряжения 500 В. При параллельном подключении этого конденсатора к незаряженному конденсатору емкостью 4 мкФ вольтметр показал напряжение 100 В. Найдите емкость C.

9. К источнику тока с внутренним сопротивлением 2 Ом подключен проводник сопротивлением 4 Ом. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая во внешней цепи, если последовательно с проводником подключить еще один такой же проводник?

10. Какова максимальная скорость электронов, вырванных с поверхности платины при облучении светом с длиной волны 100 нм? Постоянная Планка $6{,}6\cdot 10^{-34}$ Дж·с, работа выхода $0{,}5\cdot 10^{-19}$ Дж.

Публикацию подготовили
Г.Брайчев, Б.Кукушкин,
Е.Пантелеева, М.Чистова,
Г.Шадрин

Очередной прием в ОЛ ВЗМШ

Вот уже 38-й раз Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа (ОЛ ВЗМШ)» Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, проводит набор учащихся.

ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «Открытый» – это значит для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, право, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

За время существования ВЗМШ удостоверения об ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2001 года все поступившие будут систематически (примерно раз в месяц) получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов и методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы с образцами решений, деловые игры, контрольные и практические задания.

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет разработку новых интерактивных технологий в образовании и переводит часть своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций.

Контрольные работы будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ОЛ ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ и других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно, помимо конкретных недочетов, указать пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, и в филологии, и в экономике, и в других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие казавшиеся непонятными и скучными разделы.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке).

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли на бумаге и других носителях информации, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают соответствующие дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих дипломов в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительные контрольные задания. Успешно – это не значит обязательно решить все задачи. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на отделение экономики – на открытке, а на отделение филологии – на двойном тетрадном листе; см. ниже) и выслать *простой бандеролью, не сворачивая в трубку*. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают в *отдельной* тетради. На обложке тетради укажите *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено) *к сентябрю 2001 года, полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш ОЛ ВЗМШ и т.п.).

Вступительные работы обратно не высылаются.

Срок отправки работ – не позднее 15 апреля 2001 года.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров Всероссийских олимпиад, заочного и второго туров Соросовских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться в любое учреждение (школа, орган народного образования, другой спонсор) с ходатайством об оплате этой организацией соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и филологического, имеется еще одна форма – «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. Прием в эти группы проводится *до 15 октября 2001 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 2001 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами по представлению ОЛ ВЗМШ как факультативные занятия.

На Северо-западе России давно работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете, имеющая отделения математики, биологии и химии.

Проживающие в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках, желающие поступить на отделения математики и химии, могут выслать вступительные работы по адресу:

198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д. 32, С-З ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ОЛ ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ:

117234 Москва В-234, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (с указанием отделения).

Телефон: (095) 939-39-30.

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ имеются:

- при университетах – в городах Воронеж, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Магадан, Ростов-на-Дону, Самара, Ульяновск, Челябинск, Ярославль;
- при педагогических институтах – в городах Киров, Петрозаводск, Тернополь;
- при Брянском Дворце творчества молодежи;
- при Калужском Центре научно-технического творчества молодежи;
- при Могилевском областном Дворце пионеров.

Ниже вы найдете краткие сведения об отделениях ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу, разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности.

Обучение длится 4 года. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2001 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 7 классов средней школы, на 2-й курс – 8 классов, на 3-й – 9 классов, на 4-й – 10. При этом поступившим на 2-й и 3-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 4-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке напишите, на какой курс вы хотите поступить.

Группы «Коллективный ученик» на все курсы по любой программе принимаются без вступительной работы по заявлению руководителя.

Задачи

1 (8 – 10). Пусть в первом сосуде содержится 1 л воды, а второй сосуд пустой. Первое переливание – половину имеющейся в первом сосуде воды переливаем во второй, второе переливание – половину имеющейся во втором сосуде воды переливаем в первый, третье переливание – половину имеющейся в первом сосуде воды переливаем во второй, и т.д. Сколько воды будет в каждом сосуде после 2001-го переливания?

2 (8 – 10). Сторона AB треугольника ABC меньше его стороны BC. На стороне BC взяли точку D так, что $BD = AB$. Пусть биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке F, а описанную около треугольника ABC окружность – в точке E. Можно ли около четырехугольника $CDFE$ описать окружность?

3 (7 – 10). Для новогоднего праздника закуплены орехи, конфеты и пряники, всего 760 штук. Орехов закуплено на 80 больше, чем конфет, а пряников – на 40 меньше, чем конфет. Какое наибольшее количество одинаковых подарков можно приготовить для участников праздника, чтобы были использованы все закупленные лакомства?

4 (8 – 10). Сторона квадрата $ABCD$ равна 5. Точка E лежит на его стороне AB, точка F – на стороне BC, причем $BE = CF = 1$. Под каким углом пересекаются прямые AF и DE?

5 (7 – 10). В однокруговом шахматном турнире (каждый участник один раз играет с каждым из остальных; за победу – 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков) приняли участие два семиклассника и несколько восьмиклассников. Оказалось, что семиклассники набрали вместе 8 очков, а все восьмиклассники набрали по одинаковому числу очков. Сколько было восьмиклассников?

6 (8 – 10). Пусть медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BN (точки M и N лежат на сторонах BC и AC соответственно), причем $AM = a$, $BN = b$. Найдите площадь треугольника ABC.

7 (7 – 10). Средний возраст врачей и больных в некоторой больнице составляет 40 лет, при этом средний возраст врачей 35 лет, средний возраст больных 50 лет. Кого больше: врачей или больных, и во сколько раз?

8 (9 – 10). Дана трапеция $ABCD$. Пусть радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R_1, радиус окружности, описанной около треугольника BCD, равен R_2, радиус окружности, описанной около треугольника ACD, равен R_3. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD.

9 (7 – 10). На доске выписали все натуральные числа от 1 до 2001. Двое играют в следующую игру. Они по очереди стирают по одному числу из написанных на доске до тех пор, пока на ней не останутся два числа. Если сумма оставшихся чисел делится на 3, выигрывает первый игрок, а если не делится – то второй. Кто выиграет при правильной игре? Как он должен для этого играть?

10 (8 – 10). Высота трапеции равна 4, ее диагонали взаимно перпендикулярны, и одна из них равна 5. Найдите площадь трапеции.

11 (7 – 10). На доске выписаны подряд квадраты всех последовательных натуральных чисел, начиная с 1:

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad \ldots \quad (n-2)^2 \quad (n-1)^2 \quad n^2$$

Можно ли между ними расставить знаки «плюс» и «минус» так, чтобы полученная алгебраическая сумма равнялась нулю, если:

а) $n = 2001$; б) $n = 2002$; в) $n = 2000$; г) $n = 2003$; д) $n = 2004$?

12 (9 – 10). Дан треугольник ABC. Известно, что из отрезков, равных косинусам его углов, можно составить треугольник, равный треугольнику ABC. Найдите стороны треугольника.

Отделение биологии

Набор проводится в 28-й раз. Основное внимание уделяется наименее изучаемым в школе, но бурно развивающимся в настоящее время разделам биологической науки: молекулярной биологии, биохимии, иммунологии, генетике, биофизике, физиологии и т.д.

На отделении созданы известные в стране оригинальные учебники, задачники и другие учебные пособия для школьников (часть из них издана массовым тиражом издательствами «Мирос» и «Фазис» и хорошо известна в школах).

Проводится набор на два потока: трехгодичное обучение на базе 8 классов и двухгодичное – на базе 9 классов. Принимаются группы «Коллективный ученик». Такой группе надо выслать коллективно выполненную работу, а также заверенный печатью учреждения, при котором она будет работать, список членов группы с указанием фамилии, имени и отчества руководителя кружка.

При решении задач можно использовать и факты, найденные в литературе (в этом случае приведите ссылки на источник), и собственные идеи. Вместе с работой необходимо прислать стандартный конверт с маркой и полным (с индексом) почтовым адресом для отправки решения Приемной комиссии.

Поступающие на трехгодичное обучение решают задачи 1 – 5 из нижеприведенного списка, на двухгодичное обучение – задачи 3 – 8.

Задачи

1. Известно, что разные годы сильно отличаются по урожаю грибов. От чего зависит, будет ли год грибным? (Не ограничивайтесь одной идеей; перечислите все существенные причины, объяснив их связь с урожайностью.)

2. Зачем стрекочут кузнечики? Или, быть может, слово «зачем» в данном случае неприменимо, и следует спрашивать, отчего они стрекочут? (Предложите несколько гипотез о причинах этого явления. Опишите опыты, которые позволят подтвердить либо опровергнуть выдвинутые вами гипотезы.)

3. Какие особенности строения, физиологии и поведения помогают разным животным уменьшить угрозу поедания их хищниками? (В ответе не нужно описывать однотипные особенности разных видов. Выделите принципиально разные группы приспособлений, защищающих животное от хищника. Для каждой из этих групп приведите по одному-два примера.)

4. Перед вами перечень растений: виноград, заразиха, кедр, ламинария, лещина, маршанция, можжевельник, орляк, рогоз, росянка, сфагнум, тутовник, хара, хлопчатник, хлорелла, чеснок. Предложите как можно больше критериев, по которым их можно разделить на две группы. Для каждого критерия укажите, какие растения в какую группу попадут.

5. Приведите как можно больше примеров, показывающих, что на основании данных о численном соотношении представителей разных систематических групп в экосистеме можно делать выводы о ее благополучии. Для каждого примера поясните, как связаны наблюдаемый рост либо падение численности определенных организмов и то или иное негативное воздействие на экосистему.

6. Вам поручили проверить, действительно ли лосось руководствуется запахами, возвращаясь для нереста в водоем, где он родился, или же он использует какой-либо другой способ навигации. Опишите план ваших исследований.

7. Довольно часто в организме больного человека для восстановления нормальной работы пораженного органа включаются компенсаторные процессы, связанные с повышенной нагрузкой на другие органы. Однако через какое-то время болезнь все же развивается, хотя с другими проявлениями (симптомами). Объясните, почему это происходит, рассмотрев конкретные примеры различных заболеваний.

8. Клетки крови человека крайне разнообразны. Гистологи разделяют их на десятки групп. Какими методами можно выяснить родственные отношения между этими группами (т.е. доказать превращение одних клеток в другие в ходе их индивидуального развития)?

Отделение физики

Отделение работает 9 лет. За это время создан и прошел проверку оригинальный двухгодичный курс заочного обучения, завершается работа по дополнению его до трехгодичного.

Основное внимание уделяется решению физических задач. В пособиях излагаются методы, пригодные для изучения и стандартных, и более сложных ситуаций. Акценты делаются как на выяснение физического смысла тех или иных явлений, так и на техническую, вычислительную сторону, на использование математического аппарата и на качественное истолкование полученных результатов.

В программе – все основные разделы школьного курса, а также темы, мало или совсем не изучаемые в школе. Изложение максимально приближено к современным взглядам и достижениям физической науки.

Обучение одно- или двухгодичное.

Поступающие на двухгодичный поток (на базе 9 классов средней школы) должны решить задачи 1 – 5 приведенной ниже контрольной работы, поступающие на одногодичный поток (на базе 10 классов) – задачи 4 – 8; желающие за один год пройти всю двухгодичную программу (на базе 10 классов) решают все задачи и пишут дополнительно к сведениям о себе «10+11» на обложке тетради с решениями.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Задачи

1. Обруч начинает катиться без проскальзывания по внешней стороне неподвижного обруча большего радиуса. Известно, что положение обручей в первый раз после старта совпадает с начальным через $n = 4$ оборота меньшего обруча. Найдите отношение радиусов обручей.

2. Массивная плоскость движется со скоростью $2v$ вдогонку другой такой же плоскости, скорость которой v. Маленький шарик перемещается в пространстве между плоскостями, абсолютно упруго соударяясь с ними. В начальный момент шарик имеет скорость $4v$ и находится около плоскости, скорость которой больше (рис.1). Найдите, сколько соударений произойдет за то время, пока первоначальное расстояние между плоскостями уменьшится в $n = 4$ раза. Силой тяжести пренебречь.

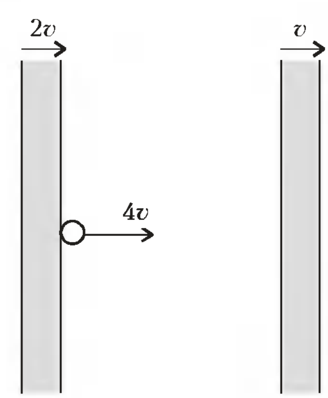


Рис. 1

3. Через неподвижный блок переброшена длинная веревка, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 1{,}55$ кг и $m_2 = 1{,}15$ кг. Вначале грузы удерживают так, что тяжелый груз находится на $L = 80$ см выше легкого, а затем их отпускают. Когда грузы оказываются на одной высоте, от тяжелого груза отваливается часть массой $\Delta m = 0{,}55$ кг. Через какое время после этого момента расстояние между грузами снова станет равным 80 см? Веревка и блок идеальные.

4. Конструкция из трех жестко соединенных стержней стоит на горизонтальной поверхности (рис.2). Масса каждого из наклонных стержней m, а масса горизонтального стержня M.

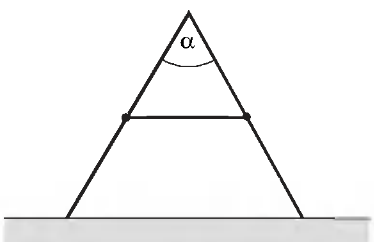


Рис. 2

Найдите силу взаимодействия между горизонтальным и наклонными стержнями, если известно, что $\alpha = 60°$, а горизонтальный стержень соединяет середины наклонных стержней.

5. С помощью линзы получено четкое и в $n = 2$ раза увеличенное изображение свечи на экране. Расстояние от свечи до экрана $L = 45$ см. Какая линза была использована: собирающая или рассеивающая? Чему равно фокусное расстояние этой линзы?

6. Доска массой M подвешена за концы к потолку на двух одинаковых пружинах жесткостью k каждая. Посередине доски сидит лягушка массой m, при этом вся система находится в равновесии. В некоторый момент лягушка прыгает вертикально вверх со скоростью u относительно доски. Найдите амплитуду последующих колебаний доски, считая, что лягушка обратно на доску не падает.

7. Кипятильник мощностью $P_1 = 0{,}5$ кВт нагревает банку с водой до максимальной температуры $t_1 = 80$ °С. Известно, что банка с горячей водой отдает за секунду в окружающую среду количество теплоты, пропорциональное разности температур воды и воздуха. Температура воздуха $t_0 = 20$ °С. Сможет ли вскипятить воду в этой банке кипятильник мощностью $P_2 = 0{,}75$ кВт? Сколько примерно времени потребуется, чтобы нагреть банку с водой с помощью второго кипятильника от температуры t_1 на $\Delta t = 2$ °С, если теплоемкость банки с водой $C = 40$ кДж/К?

8. Лампа подключена к источнику ЭДС. Известно, что накал этой лампы уменьшится вдвое, если к ней последовательно подключить вторую такую же лампу. Во сколько раз уменьшится накал, если в цепь последовательно включить третью такую же лампу?

Отделение химии

Отделение работает по оригинальным программам, созданным преподавателями и аспирантами МГУ.

Вы можете выбрать подходящую для вас индивидуальную программу обучения в зависимости от предполагаемой продолжительности обучения и от вуза, в который вы собираетесь поступать. Полная программа обучения на нашем отделении рассчитана на три года. В настоящее время на отделении работают три годичных курса:

- общая химия (с элементами неорганической химии), это начальный курс, предназначенный для школьников 9 – 10 классов;
- органическая химия, этот курс требует некоторой начальной подготовки и рассчитан на учеников 10 (11) классов;
- неорганическая химия, это достаточно сложный курс, предполагающий знание основ общей химии, рассчитан на учащихся 11 (10) классов.

Также вам предлагается принципиально новый курс – химия окружающей среды. Этот курс, расчитанный на полгода, требует знаний основ общей и неорганической химии. Он будет особенно полезен тем, кто хочет продолжить обучение в вузах биологического и медицинского профиля; его можно совмещать с курсами органической химии или неорганической химии.

На отделение принимаются имеющие базовое образование в объеме 8, 9 или 10 классов средней школы.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, по заявлению руководителя.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи

1. Сколько атомов N содержится в 1,3 л азота при 127 °С и 1 атм?

2. На кусок алюминия массой 2,3 г подействовали избытком 20%-го раствора соляной кислоты. Взлетит ли шарик массой 5 г, наполненный выделившимся газом?

3. Опишите (кратко) схему получения сульфата меди, используя в качестве исходных веществ только серу, медь и воду. В уравнениях реакций проставьте коэффициенты и обязательно укажите условия протекания реакций.

4. Приведите 5 разных реакций получения гидроксида калия.

5. Напишите структурные формулы всех продуктов, которые могут образоваться при нагревании смеси изопропилового и н-бутилового спирта с концентрированной серной кислотой.

Отделение филологии

Отделение существует с 1989 года. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, литературе, интересным проблемам литературоведения и лингвистики. Последние два года в рамках отделения активно развиваются новые направления – английский язык и журналистика.

Принимаются *все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 8 классов.* Отделение предлагает на выбор 12 учебных программ.

Вы хотите:

- исправить грамотность;
- познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка;
- освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа;
- научиться говорить по-английски и понимать английскую речь;
- узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности;
- приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз?

Тогда пришлите нам вступительную работу, и мы поможем выбрать ту программу или программы, которые нацелены на решение именно вашей задачи.

Чтобы специалисты отделения могли предложить вам наиболее эффективную форму обучения, им необходимо как можно больше знать о ваших целях и проблемах, поэтому в качестве вступительной работы предлагается ответить на вопросы помещенного ниже теста.

Отвечать на вопросы теста следует на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: ФИО, какой класс заканчиваете, полный почтовый адрес, телефон (если есть). Затем полностью перепишите условия теста и выполните задания

1 – 6 (впишите, подчеркните нужное, проставьте галочки или цифры в квадратики и т.п.).

Тест

1. Впишите нужное

К 1 сентября 2001 года я закончу ______ класс.

2. Заполните клетки

Моя средняя оценка:
по русскому языку
по литературе

3. Подчеркните нужное

Моя грамотность:
а) абсолютная;
б) вполне приличная;
в) так себе;
г) низкая.

4. Расставьте цифры от 1 до 6 в соответствии с тем, насколько для вас важны следующие задачи (1 – самое важное; 6 – наименее важное):

узнать как можно больше об устройстве русского языка;
узнать как можно больше о русской литературе;
научиться хорошо и логично выражать свои мысли в сочинении;
писать грамотнее;
узнать больше об устройстве языков мира;
узнать больше о том, что за наука – литературоведение.

5. Подчеркните нужное

Надеюсь, что учеба на филологическом отделении ОЛ ВЗМШ даст мне возможность

а) удовлетворить свое природное любопытство;

б) заняться в свободное время тем, что мне интересно;

в) исправить школьные оценки по русскому языку и литературе;

г) приобрести знания и навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз.

6. Подчеркните нужное

Скорее всего, я буду поступать в вуз

а) на филологическую специальность, где пишут сочинение и сдают русский устно;

б) на гуманитарную специальность, где пишут сочинение;

в) в негуманитарный вуз и писать сочинение;

г) в негуманитарный вуз и писать диктант;

д) мне важно школу закончить!

Желающие поступить на новые курсы «Журналистика: первый шаг» (основы журналистики, анализ текста, практическая работа в разных публицистических жанрах) и «Английский язык» (для тех, кто знает язык в объеме «Yes, it is») принимаются на основании заявления и анкету не заполняют.

Вместе с анкетой и/или заявлением пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Отделение экономики

Основной курс обучения – он называется «Прикладная экономика» – включает изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой бизнеса в деловой игре по переписке. Окончившим основной курс предлагается специализация по выбору: «Предпринимательство и менеджмент», «Бухгалтерский учет и финансовый анализ» и др.

Учащимся, желающим одновременно подготовиться к поступлению на экономический факультет МГУ и в другие экономические или юридические вузы для дальнейшей работы в экономической сфере, предлагается специальная программа «Экономика ПЛЮС», включающая, наряду с экономическими дисциплинами, изучение одного или нескольких дополнительных предметов по выбору: математики, обществознания, русского языка и литературы, истории и географии.

Принимаются *все желающие, имеющие образование не ниже 7 классов.* Обучение ведется либо индивидуально, либо в небольших группах (2 – 5 человек). Формы обучения «Коллективный ученик» пока нет.

В нашей вступительной работе – тесте – мы не требуем от поступающих специальных знаний по экономике, так как экономика преподается еще не во всех школах, тем не менее, для успешного ответа на вопросы теста потребуется определенный кругозор, сообразительность и умение мыслить логически.

Решения присылайте ТОЛЬКО на открытках с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – ПЕЧАТНЫМИ буквами); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест 2001 г.». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов осмысленную фразу, являющуюся началом одного из стихотворений М.Ю.Лермонтова (пробелы между словами и знаки препинания расставьте по собственному желанию).

Тест

1. Дон Румата, главный герой романа братьев Стругацких «Трудно быть богом», при помощи специального оборудования превращал древесную стружку в золотые монеты, которыми потом расплачивался за свои покупки. К каким последствиям в арканарской экономике, по вашему мнению, это может привести:

Л) цены на все товары вырастут, но реальные доходы при этом не изменятся;

П) цены сократятся пропорционально увеличению реальных доходов;

Н) цены возрастут пропорционально уменьшению реальных доходов;

Г) цены останутся неизменными, а реальные доходы сократятся;

С) дон Румата станет монополистом?

2. Таинственное сооружение из огромных камней, воздвигнутое близ города Солсбери в Великобритании, известно под названием:

О) Миллениум;
К) Хэллоуин;
Ю) Стоунхендж;
Р) Колизей;
А) Сити.

3. Известный американский предприниматель, впервые внедривший на своих предприятиях конвейер:

О) Гейтс;
С) Ротшильд;
Р) Вандербильд;
Г) Якокка;
Б) Форд.

4. Чем занимается специалист по логистике:

Н) поддерживает работоспособность вычислительной техники на предприятии;

Л) организует движение товарно-материальных потоков на предприятии;

Щ) отвечает за контакты с прессой;

И) рассчитывает зарплату сотрудникам;

Е) помогает своему начальнику решать кроссворды?

5. Этот пролив находится в восточной части РФ и носит имя народа, не имеющего к нему никакого отношения:

В) Дарданеллы;
Н) Бурятский;
Ы) Калмыцкий;
Ю) Татарский;
А) Карельский.

6. На полученные 2% первоначально вложенного капитала нужно выплатить налог в размере двух процентов. Какой процент от первоначально вложенного капитала нужно выплатить в качестве налога:

Е) 1%;
И) 4%;
У) 0,4%;
О) 0,04%;
Й) 0,22%?

7. Московский университет был основан по указу:
Н) Екатерины I;
В) Екатерины II;
Р) Петра I;
М) Бориса Годунова;
Т) Елизаветы Петровны.

8. Что нужно сделать для того, чтобы погасить облигацию:
А) закрыть счет клиенту банка;
Ч) выплатить ее держателю заранее оговоренную сумму;
Е) выплатить ее держателю текущий купонный доход;
В) возместить убытки от реализации данной облигации на открытом рынке;
Р) передать право на владение и распоряжение облигацией другому лицу?

9. 451° по Фаренгейту – это температура:
И) горения бумаги;
М) кипения воды;
Д) тела здорового человека;
О) нетопленного класса зимой;
Р) бурого медведя в период спячки.

10. «Нет на свете печальнее повести, чем об этой прибавочной стоимости». Автором этого высказывания является:
И) В. Шекспир;
Л) К. Маркс;
Ш) А. Смит;
З) А. Галич;
Ы) Е. Гайдар.

11. Укажите неправильно подобранную пару:
Т) Ч. Гарольд – Дж. Г. Байрон;
К) Чацкий – Грибоедов;
И) Печорин – Лермонтов;
С) Муму – Тургенев;
Н) Вертер – Гейне.

12. Больше всего наличных долларов, понятно, в США. А какая страна является второй по количеству наличных долларов США в обращении:
Н) Канада;
Т) Англия;
У) Россия;
А) Индия;
О) Китай?

13. Ванька-дурак изобрел скатерть-самобранку. Жизнь в его деревне стала быстро меняться. Ему нужно срочно:
Й) зарегистрироваться в органах статистики;
Я) запатентовать свое изобретение;
М) отправить бабушку за солью;
Ы) купить высоконадежные государственные облигации;
Ь) приобрести доллары, спрятать их и все-таки отправить бабушку за солью.

Отделение «Нравственность, право, закон»

Это — пятый набор на отделение. Для поступления необходимо иметь базовое образование не ниже 8 классов средней школы.

Предлагается одногодичный курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В программе:

• человек и природа, обычай, мораль, право, закон и государство, гражданское общество, либерализм – возникновение этих понятий, что они значат для нас сейчас;
• права человека;
• общекультурная тематика, связанная с основным направлением курса, примеры судебных процессов;
• информация и дополнения.

Успешно окончившим годовой курс мы собираемся предложить углубленный юридический курс.

Предварительных знаний в области права от поступающих на отделение не требуется, нужны только желание учиться и настойчивость. Формы обучения – индивидуальная и в небольших группах «Коллективный ученик».

Желающие поступить должны сообщить свой полный почтовый адрес (с индексом), фамилию, имя и отчество, сколько классов средней школы закончено, а также указать источник информации об ОЛ ВЗМШ. Все должно быть написано разборчиво. В письмо *обязательно* вложите чистый конверт с маркой и вашим обратным адресом. На отдельном листе бумаги напишите: «Ответы на тест: 1, 2, 3, 4, 5» и под каждым номером впишите букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из выписанных ими букв ключевое слово.

Тест

1. Кого называют «отцом истории»:
Э) Фукидида; Ю) Геродота; Я) В.О.Ключевского?

2. Как назывался первый в России свод законов:
О) «Домострой»; П) «Апостол»; Р) «Русская правда»?

3. Государственный суверенитет России был провозглашен:
З) 7 ноября 1917 года; И) 12 июня 1990 года; К) 5 декабря 1936 года.

4. Отличительной чертой восточных обществ является:
С) кастовость; Т) открытость; У) демократичность.

5. Что было древнейшим источником римского права:
Р) судебный прецедент; С) нормативный акт; Т) общепризнанный правовой обычай?

Отделение истории

Отделение работает с 1998 года. Ученикам исторического отделения регулярно направляются оригинальные учебные пособия и задания, подготовленные преподавателями МГУ специально для заочного образования. Обучение на историческом отделении ОЛ ВЗМШ позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие годовой курс обучения могут продолжить образование, занимаясь на спецкурсах.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и на что «напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас преподаватели университета пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одним из первых!

Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять ОСОБЫЕ задания и сообщать нам, ЧТО ВЫ РАСКОПАЛИ. Мы же вам подскажем, как действовать дальше. Ведь, в сущности, профессия историка и состоит из этих раскопок: историк-археолог копает землю и песок, отыскивая крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и превращает их в живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Задания

1. Отгадайте, кто это:
• Сын священника. Сделал блестящую карьеру чиновника.
• Работал при трех императорах: Павле I, Александре I, Николае I.
• Карьеру начал при Павле.
• С 1808 года – ближайший совет-

ник Александра I. Чиновник и царь бродили по дорожкам Царского Села, и оба говорили о переустройстве России.

• Царь поручил ему разработать план реформ. Советник составил проект и подал императору, но царь использовал только то, что касалось высших эшелонов власти.

• Если бы его проект осуществился, в России впервые был бы введен принцип разделения властей (на законодательную, исполнительную и судебную).

• Он писал: «Власть не может находиться в одних руках, ибо это ведет к диктатуре».

• Инициатор создания Госсовета и его первый статс-секретарь.

• Его главный идеологический противник – Карамзин – осудил проект в записке к царю.

• Указами о «придворных званиях» и об «экзаменах на чин» он раздражал аристократию.

• За свой смелый проект накануне войны 1812 года высшим светом объявлен французским шпионом и сослан. Прощаясь, царь обливал чиновника слезами.

• Прощен в 1816 году. В 1819-21 годы был генерал-губернатором Сибири.

• Популярен среди декабристов. Они хотели после захвата власти ввести его в состав временного правительства, а он вошел в состав следственного комитета по делу декабристов, где наблюдал за законностью по поручению Николая I.

• При Николае I руководил кодификацией законов и составил свод российского права, действовавший до 1917 года.

2. Нарисуйте не более чем в семи предложениях исторический портрет советского вождя, осуществившего индустриализацию и коллективизацию.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства образования РФ при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2001/02 учебный год.

ЗФТШ при МФТИ как федеральное государственное учреждение дополнительного образования работает с 1966 года. За это время школу окончили свыше 60 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Министерство образования Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит специалистов по существующей только в МФТИ единой специальности «Прикладные математика и физика». В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ – крупнейшие ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 2001/02 учебный год проводится на следующие отделения:

– *Заочное (индивидуальное). Телефон: (095) 408-51-45*

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8–11 классы, но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 кл.), а затем рекомендуемые ЗФТШ авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (часто – выпускники ЗФТШ).

– *Очно-заочное (в факультативных группах). Телефон/факс: (095) 485-42-27*

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями – физики и математики. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа (не менее 8 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список обучающихся (ФИО полностью с указанием класса текущего учебного года и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт с маркой достоинством 2 руб. для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать *до 25 мая 2001 года* по адресу: 141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ (с указанием «Факультатив»). Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются. Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Руководители факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся) и информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т.п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

– *Очное (в вечерних консультационных пунктах). Телефон/факс: (095) 485-42-27*

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ ра-

Л.№								
№ п/п								Σ
Ф.								
М.								

1. Область	*Республика Коми*
2. Фамилия, имя, отчество	*Слинько Евгения Вячеславовна*
3. Класс, в котором учитесь	*девятый*
4. Номер школы	*№32*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	*физико-технический лицей*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*169917 г.Воркута, ул. Ломоносова, д.3а, кв.13*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*программист АКБ «Воркута»*
мать	*врач поликлиники №1*
8. Адрес школы, телефон, e-mail	*169900 г.Воркута, ул. Ленина, д.14б*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Сапогин Сергей Александрович*
по математике	*Поднебесов Алексей Викторович*
10. Каким образом к Вам попало это объявление?	

ботают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике, которое проводится в сентябре.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ (всех отделений) предлагается участвовать в физико-математической олимпиаде «Физтех-абитуриент», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в мартовские школьные каникулы, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также в конкурсах и научно-технической конференции школьников «Старт в науку».

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ по выбранной форме обучения, переводятся в следующий класс, а выпускники (11 кл.) получают Свидетельство об окончании с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса (без выполнения вступительного задания) в ЗФТШ принимаются *победители* областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике 2000/01 учебного года (участие нужно подтвердить справкой из школы и копией диплома *до 15 мая 2001 г.*).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в *одну* школьную тетрадь. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради.

На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу.

В ЗФТШ ежегодно приходит более 6 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *три одинаковых* бандерольных конверта размером 160 × 230 мм с наклеенными марками на сумму 3 руб. на каждый конверт. На конвертах напишите свой домашний адрес.

Срок отправления решения – *не позднее 1 марта 2001 года.* Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2001 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу: *141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ.*

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 252680 г.Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: (044) 444-95-24.

Для учащихся из стран ближнего зарубежья возможно платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный прием будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании *по физике*: задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 1, 2, 4, 6–8 – для восьмых классов, 2, 4, 7–10 – для девятых классов, 2, 9–14 – для десятых классов. В задании *по математике*: задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 2–8 – для восьмых классов, 5–11 – для девятых классов, 8–14 – для десятых классов. Номера классов указаны на текущий 2000/01 учебный год.

Вступительное задание по математике

1. Школьники отправились в туристический поход из пункта A в пункт B. В первый день они шли 6 часов и прошли $\frac{1}{3}$ всего пути; во второй день они прошли на 10% меньше. В третий день школьники были в пути только 3 часа и шли со средней скоростью, с которой они шли в первый день. В четвертый день они прошли оставшиеся 9 км. Чему равно расстояние между пунктами A и B?

2. Имеется восемь шариков для подшипника. Один шарик, при равных размерах с остальными, оказался сделанным из более легкого сплава. Как найти этот «легкий» шарик, если имеются весы без гирь, взвешивая шарики только два раза?

3. Сумма цифр двузначного числа равна 14. Если к этому числу прибавить 46, то получится число, произведение цифр которого равно 6. Найдите двузначное число.

4. Пусть m и n – натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n-2m}$, если известно, что она сократима?

5. Даны два отрезка m и c. С помощью циркуля и линейки постройте прямоугольный треугольник, для которого c – длина гипотезы, m – сумма длин катетов.

6. Аквариум частично заполнен водой. За месяц 40% воды испарилось. При этом объем воздуха увеличился на 60%. Какую часть объема аквариума занимала вода в конце месяца?

7. Решите уравнение

$$|2x+5|=\sqrt{x+3}+1.$$

8. Группа студентов сдавала экзамен по математике. Число студентов, сдавших экзамен, оказалось в интервале от 96,8% до 97,6%. Каково наименьшее возможное число студентов в группе?

9. В равнобедренном треугольнике ABC основание AB является диаметром окружности, которая пересекает боковые стороны AC и CB в точках D и E соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $AD=2$, $AE=\frac{8}{3}$.

10. Найдите все значения параметра a, при которых ровно один корень уравнения

$$x^2+2(a-1)x+3a+1=0$$

удовлетворяет неравенству $x<-1$.

11. Решите неравенство

$$\frac{16-3x+\sqrt{x^2-3x-4}}{6-x}\geq 1.$$

12. Решите систему

$$\begin{cases}2\operatorname{tg}^4 2x+6\cos^2 y=5,\\ \dfrac{2}{\cos^2 2x}+4\sin y=1.\end{cases}$$

13. В ромбе $ABCD$ из вершины B на сторону AD опущен перпендикуляр BE. Найдите углы ромба, если $2\sqrt{3}\,CE=\sqrt{7}AC$.

14. Найдите все значения параметра a, при которых функция

$$y=x-\cos 2x+a\cos 6x-7ax$$

строго убывает на всей числовой оси.

Вступительное задание по физике

1. Пловец переплывает реку, имеющую ширину $h=54$ м. Под каким углом φ к направлению течения он должен плыть, чтобы переправиться на противоположный берег в кратчайшее время? На какое расстояние s в этом случае течение снесет пловца вдоль берега, если скорость течения реки $u=5$ км/ч, а скорость пловца относительно воды $v=1$ м/с?

2. Пешеход треть всего пути бежал со скоростью $v_1=9$ км/ч, треть всего времени шел со скоростью $v_2=4$ км/ч, а оставшуюся часть шел со скоростью, равной средней скорости на всем пути. Найдите эту скорость.

3. Однородное тело массой $M=5$ кг плавает на поверхности воды, погрузившись на половину своего объема. Найдите объем тела.

4. Гирю, подвешенную к динамометру, опускают в воду до тех пор, пока уровень воды в сосуде с вертикальными стенками не поднимается на $\Delta h=5$ см. Показание динамометра при этом изменяется на $\Delta F=0{,}5$ Н. Определите площадь дна сосуда. Плотность воды $\rho_0=10^3$ кг/м^3.

5. Взвешивание металлической трубы было произведено при помощи динамометра с предельной нагрузкой 100 Н. В результате взвешивания масса трубы оказалась равной 30 кг. Каким образом (предложите способ) было произведено взвешивание?

6. В электрическом чайнике вода нагревается от 20 °С до кипения за 10 мин. За какое время после этого 20% воды выкипит? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды $L=2300$ кДж/кг. Теплоемкость чайника и теплообмен с окружающей средой не учитывать.

7. В теплоизолированный сосуд с нагревателем постоянной мощности внутри помещены $m_1=1$ кг льда и $m_2=1$ кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой, при температуре $t_1=-40$ °С. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке 1. Удельная теплоемкость льда $c_л=2$ кДж/(кг·К), твердого вещества $c_1=1$ кДж/(кг·К). Найдите удельную теплоту плавления вещества λ и его удельную теплоемкость c_2 в расплавленном состоянии.

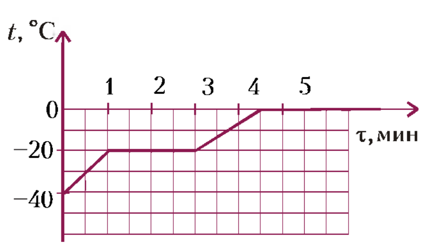


Рис. 1

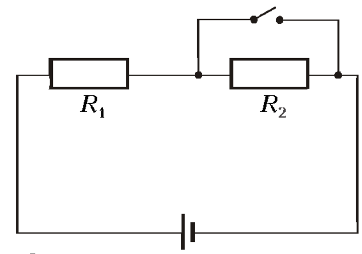


Рис. 2

8. Во сколько раз изменится тепловая мощность, выделяемая в цепи (рис.2), если замкнуть ключ при условии, что $R_1=2R_2$? Напряжение источника постоянно.

9. Спортсмен прыгает с 10-метровой вышки и погружается в воду на расстоянии $L=3$ м по горизонтали от края вышки через время $t=2$ с. Определите скорость спортсмена в момент прыжка. Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Автомобили на автодроме испытываются на скорости $v=120$ км/ч.

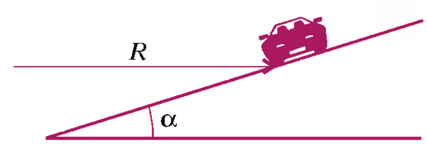


Рис. 3

Под каким углом α к горизонту (рис.3) должно быть наклонено полотно дороги с радиусом закругления $R=110$ м, чтобы движение автомобиля было наиболее безопасным даже в гололедицу?

11. Два одинаковых пластилиновых шарика массой m каждый начинают движение одновременно. Первый бросают вертикально вверх со скоростью v_0 с поверхности земли, а второй падает с высоты h без начальной скорости, как показано на рисунке 4. В воздухе происходит абсолютно неупругое соударение шариков. С какой скоростью упадет на землю комок пластилина, образовавшийся при ударе? Какое количество теплоты выделится при соударении шариков? Сопротивлением воздуха пренебречь.

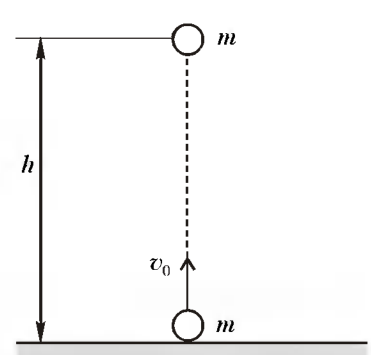


Рис. 4

12. В закрытом сосуде объемом $V = 22{,}4$ дм^3 находится $\nu_1 = 1$ моль воды и кислород. При температуре $t = 100$ °С давление в сосуде равно $p = 2\cdot 10^5$ Па. Определите количество кислорода, находящегося в сосуде.

13. Моль идеального одноатомного газа совершает замкнутый цикл, состоящий из адиабатического расширения, изотермического сжатия и изохорического нагревания (рис.5). Какая работа была совершена газом в адиабатическом процессе, если в процессе изохорического нагревания газу передали $Q = 10$ кДж тепла?

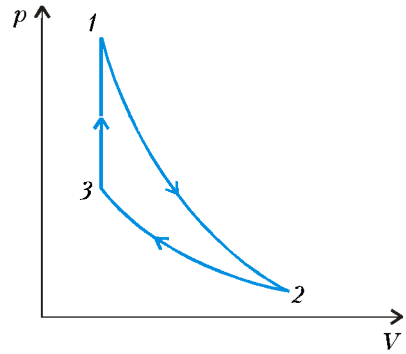


Рис. 5

14. Два одинаковых заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускают в керосин. Какова должна быть плотность материала шариков ρ, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$, его плотность $\rho_0 = 0{,}8$ г/см^3.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно — СУНЦ) при МГУ (школа им. академика А.Н.Колмогорова), СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПГУ объявляют набор школьников в 10 (двухгодичное обучение) и 11 (одногодичное обучение) классы.

Обучение ведется на двух отделениях: физико-математическом и химико-биологическом. В составе физико-математического отделения кроме основного профиля предлагаются компьютерно-информационный, биофизический (СУНЦ МГУ) и экономический. Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу производится на конкурсной основе по итогам нескольких туров. Первый тур — заочный письменный экзамен по математике, физике, химии. Успешно выдержавшие письменный экзамен по решению приемной комиссии в апреле — мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены.

Ниже приводятся условия задач заочного вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради (на титульном листе напишите желаемый профиль обучения). На первой странице укажите свои анкетные данные: 1) фамилию, имя, отчество (полностью); 2) домашний адрес (подробный), индекс, 3) подробное название школы, класс.

Работу отправляйте простой бандеролью (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на свой домашний адрес) по одному из следующих адресов:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия, заочный экзамен (внимание: жители Москвы принимаются в учебный центр без предоставления общежития, телефон для справок 445-11-08);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9б, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.

Срок отправки работ — *не позднее 10 марта 2001 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Желаем успеха!

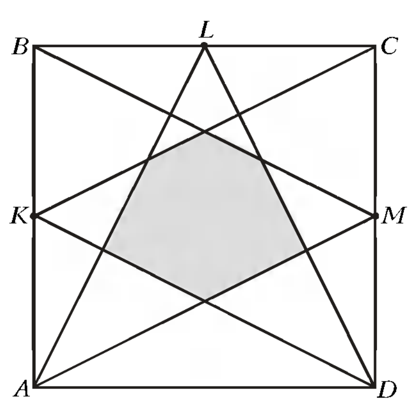
Вступительное задание

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Какой угол образуют стрелки правильно идущих часов в 8 часов 20 минут?

2. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. Точки K, L и M – середины сторон AB, BC и CD соответственно. Найдите площадь фигуры, выделенной на рисунке.



3. Найдите $a^3+b^3+c^3$, если $a+b+c=0$, а $abc=1$.

4. В треугольнике ABC расстояние от вершины A до точки пересечения высот равно радиусу описанной окружности. Найдите все возможные значения величины угла A.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $x+2y$, если

$$x^2-xy+y^2=4.$$

Для поступающих в 11 класс

1. Найдите $a^4+b^4+c^4$, если $a^2+b^2+c^2=1$, $a+b+c=0$.

2. Решите уравнение

$$x^4-2x^2-400x=9999.$$

3. Через точку M, расположенную внутри треугольника ABC, проведены 3 прямые, параллельные сторонам треугольника. Отрезки прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой. Найдите длины этих отрезков, если стороны треугольника равны a, b и c.

4. Найдите наибольшее значение выражения x^2-xy+y^2, если

$$2x^2+3xy+y^2=2.$$

5. Пусть AM и BN – медианы треугольника ABC, O – точка их пересечения Найдите AB, если известно, что $BC=a$, $AC=b$, а точки M, N, C и O лежат на одной окружности.

Физика

Для поступающих в 10 класс

1. Если соединить две пружины последовательно, то для их растяжения на 1 см потребуется приложить силу 1 Н. Если те же пружины соединить параллельно, то для растяжения на 1 см потребуется сила 5 Н. Какие силы нужно приложить к каждой пружине в отдельности, чтобы растянуть ее на 1 см? (Обе пружины подчиняются закону Гука.)

2. С какой бы высоты H ни падал без начальной скорости упругий мяч на неподвижную горизонтальную жесткую поверхность, после кратковременного удара он отскакивает и поднимается на высоту $H/2$. С какой постоянной скоростью должна двигаться навстречу мячу эта поверхность, чтобы после удара он поднялся на ту же высоту, с которой падал? (Трением о воздух можно пренебречь.)

3. В пластиковую бутылку, заполненную наполовину теплой водой, бросили кубик льда массой 1 г с температурой 0 °С, закрутили крышку и хорошенько взболтали воду. Температура воды уменьшилась на ΔT. Затем с этой бутылкой вновь проделали ту же операцию, и температура уменьшилась еще на $0{,}99\Delta T$. Какой емкости была бутылка? Теплоемкостью стенок бутылки можно пренебречь.

4. Каким должен быть радиус шарообразного геостационарного спутника, чтобы полная тень от него на Земле имела диаметр 1 км? С какой минимальной скоростью движется эта тень по поверхности Земли?

5. Если потереть о сухую газету резиновую оболочку надутого воздушного шарика, он приобретает электрический заряд. Поднесенный к потолку, такой шарик может часами висеть под потолком. Проведите этот эксперимент и оцените электрический заряд, приобретенный шариком.

Для поступающих в 11 класс

1. При массовой выброске парашютистов-десантников их одинаковые парашюты открывались сразу же после выхода человека из самолета. Выброска происходила с высоты 1 км в безветренную погоду. Время спуска самого тяжелого десантника (120 кг вместе с парашютом) – 130 с, а самого легкого (60 кг) – 184 с. За какое время спустился десантник массой 90 кг?

2. Изобретен прочный проводящий материал с нулевой плотностью. Из него изготовлены тросы, удерживающие на орбите на высоте 60 тыс. км от центра Земли спутник «А», вращающийся с периодом, равным земным суткам. Такие тросы используются для подъема и запуска геостационарных спутников Земли. Какой массой должен обладать спутник «А», чтобы можно было по тросам поднимать на геостационарную орбиту спутники массой 100 кг (по одному такому спутнику за одни сутки)? Электроэнергия для подъема спутника подается по проводящим тросам.

3. В парилке бани при температуре 100 °С и нормальном атмосферном давлении влажность воздуха составляет 1% (очень сухая парилка). Сколько столкновений молекул воды происходит в каждом кубическом сантиметре воздуха за одну секунду?

4. У вас есть батарейка с ЭДС 1 В и два незаряженных конденсатора с емкостями 2 мкФ и 3 мкФ. Какую максимальную разность потенциалов можно получить с помощью этих предметов и как это сделать?

5. В вашем школьном кабинете физики (или дома) имеется подковообразный магнит. Измерьте индукцию магнитного поля между его полюсами. Опишите все этапы проведенного вами эксперимента.

Химия

Для поступающих на химико-биологическое отделение

1. Галогенид некоторого металла содержит 51% металла (по массе). Определите металл и галоген, образующие данную соль.

2. Сколько граммов кристаллогидрата $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ необходимо добавить к 100 мл 5%-го раствора сульфата магния (плотность 1,03 г/мл), чтобы получить 10%-й раствор сульфата магния?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. с. 29)

1. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
П Л А Н Е Т О Б У С

2. Да; например, $A = 4356$, $B = 3465$.

3. Обозначим длины палочек x, y, z, u, а длины отрезков диагоналей сложенного из этих палочек четырехугольника – a, b, c, d (рис.1) так, что

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2; \\ y^2 &= b^2 + c^2; \\ z^2 &= c^2 + d^2; \\ u^2 &+ d^2 + a^2. \end{aligned} \qquad (*)$$

Если из палочек с длинами x и z сложить катеты одного прямоугольного треугольника, а из палочек с длинами y и u – катеты другого прямоугольного треугольника, то, как следует из равенств (*), гипотенузы у этих треугольников будут одинаковыми. Совместив эти треугольники по гипотенузам, получим четырехугольник с двумя прямыми углами.

4. Представим шары точками, а стенки бильярда – лучами. Отражающийся от прямой l шар S (рис.2) можно заменить симметричным ему относительно прямой l шаром S', беспрепятственно движущимся по прямолинейной траектории, поскольку угол падения шара равен углу отражения. Равенство указанных в условии задачи расстояний сводится к равенству длин отрезков $P'Q''$ и $P''Q'$, где P', Q' – точки, симметричные точкам P и Q относительно прямой OA, а P'', Q'' – точки, симметричные точкам P и Q относительно прямой OB (рис.3). Отрезки $P'Q''$ и $P''Q'$ равны как диагонали равнобочной трапеции $P'P''Q''Q'$.

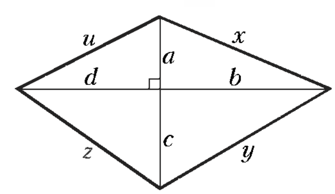


Рис. 1

5. Удобней всего подойти к задаче "с конца", т.е. исходным считать момент, когда в пробирке осталось поровну бактерий и вирусов. Итак, пусть в конечном счете в пробирке осталось M бактерий и столько же вирусов. Сразу возникает вопрос: кто нанес последний удар? Поскольку это неизвестно, рассмотрим обе возможности. Пусть последний удар нанесли бактерии. Тогда перед этим ударом было $M + 3M = 4M$ вирусов, перед предпоследним ударом (нанесенным вирусами) было $M + 2 \cdot 4M = 9M$ бактерий, а перед предыдущим ударом (нанесенным опять бактериями) имелось $4M + 3 \cdot 9M = 31M$ вирусов.

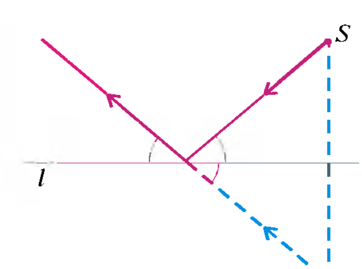


Рис. 2

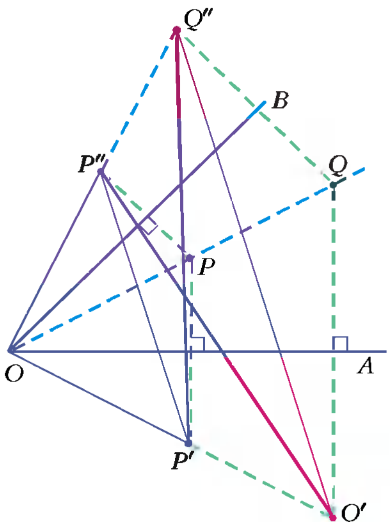


Рис. 3

Обратим внимание, что по условию первыми «стреляли» бактерии, причем произвели они не менее *двух* «залпов». Так что рассмотренный сейчас момент (когда имеется $9M$ бактерий и $31M$ вирусов) вполне мог бы быть исходным. В этом случае общее количество микробов равно $9M + 31M = 40M$, а так как по условию это число равно 2000, то $M = 2000/40 = 50$. Таким образом, в данном случае в итоге борьбы осталось в живых 50 бактерий и 50 вирусов. Предположение, что этот обмен любезностями продолжался дольше, приводит к противоречию. Рассмотрев аналогично вторую возможность, когда последний удар нанесли вирусы, опять получаем противоречие с условием.

Итак, ответ: в результате разразившегося побоища в живых осталось по 50 бактерий и вирусов.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Слагаемых ШАХ меньше 10, иначе их сумма была бы четырехзначной. Запишем ребус в виде ШАХ×У = МАТ, где У – неизвестная отличная от 0 цифра, возможно совпадающая с одной из цифр, зашифрованных буквами Ш, А, Х, М, Т. Цифры Ш = 1, А = 3, Х = 4, М = 9, Т = 8 удовлетворяют ребусу: 134×7 = 938. Покажем, что значение У = 7 наибольшее.

Предположим, что У = 8 или У = 9. Поскольку в этом случае наименьшим трехзначным числом, представленным словом ШАХ, является число 123 (так как Ш = 1, А ≠ 0, Х ≠ 0), то значение У = 9 не подходит: 123×9 = 1107. Легко проверить, что в случае У = 8 и наименьшем значении А = 2 ребус 12Х×8 = 92Т для букв Х и Т решений не имеет, в случае же А ≥ 3 произведение 1АХ×8 получается четырехзначным.

Итак, гроссмейстер объявил шах семь раз.

2. Пусть первая программа содержала K клипов. Тогда, по условию, вторая программа содержала $1{,}5K$ клипов, а Бивису понравились $K/5$ клипов первой программы и $(1{,}5K):2 = 3K/4$ клипов второй программы. По смыслу задачи все эти числа должны быть целыми, откуда следует, что K делится на 4 и на 5, т.е. на 20. Итак, $K = 20m$, где m – натуральное число. Тогда вторая программа содержала $1{,}5\times 20m = 30m$ клипов, а третья программа – все остальные, т.е. $200 - 20m - 30m = 200 - 50m$ клипов. Это число должно быть положительным, в связи с чем $200 - 50m > 0$, откуда $m < 4$.

Далее, Бивису понравились всего $(20m/5) + (30m/2) = 19m$ клипов. Батт-Хеду понравилось столько же клипов, причем в это число входили все клипы третьей программы. Поэтому $19m \ge 200 - 50m$, и $m \ge 200/69 > 2{,}8$.

Таким образом, $2{,}8 < m < 4$. Единственное натуральное число, удовлетворяющее этим условиям, это $m = 3$. Этот результат позволяет нам восстановить всю картину. Итак, первая программа содержала $20\times 3 = 60$ клипов, вторая – $1{,}5\times 60 = 90$ клипов, третья $200 - 60 - 90 = 50$ клипов. Бивису понравились $(60/5) + (90/2) = 57$ клипов, Батт-Хеду – столько же. Ну, а не понравилось каждому из них $200 - 57 = 143$ клипа.

3. Сомкнем выходящие из города дороги в еще один перекресток. Пусть N – общее количество перекрестков вместе с этим. Так как в каждом из перекрестков сходится по три дороги, то общее количество оконечностей дорог $3N$. Это число четное, поскольку каждая дорога в нашем случае имеет два конца. Следовательно, число N – четное, и в городе имеется нечетное количество перекрестков. Поскольку в каждом из них сходятся по одной дороге трех разных цветов, то для каждого цвета найдется дорога, не имеющая двух оконечностей в городе. Итак, все три выходящие из города дороги непременно имеют разные цвета.

4. Воспользуемся следующим очевидным утверждением. Имеется K карточек. Известно, что какие бы M из них ни взять, среди них окажется не менее N особых. В этом случае среди K карточек имеется не менее $K - M + N$ особых.

Считая, что особые карточки – синие, в приложении к условию задачи имеем:

K	M	N	$K-M+N$
100	80	20	40
40	10	2	32

Считая, что особые карточки – красные, в приложении к условию задачи имеем:

K	M	N	$K-M+N$
100	50	30	80
80	20	10	70
70	5	3	68

Итак, в колоде находятся 32 синих и 68 красных карточек.

5. Нет, не удастся. Если бы существовало разбиение пятиугольного поля на параллелограммы, то можно было бы пройти от любого края поля к другому краю, двигаясь по цепочке параллелограммов. Поскольку в пятиугольнике не для каждой стороны существует параллельная ей сторона, то этого сделать нельзя.

Кеплер и винные бочки – австрийские и рейнские

1. Учитывая, что $AB = OA/\sin\alpha$, имеем

$$E = \frac{C}{OA^2}\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Таким образом, если лампу поместить в вершину конуса максимального объема, то окружность его основания получит наибольшую освещенность.

2. Обозначим $a = 4 - x$, тогда $b = 4 + x$ и $ab(b-a) = 2x(16 - x^2)$, причем $0 \le x \le 4$. Максимум достигается при $x = 4/\sqrt{3}$ и равен $256/(3\sqrt{3})$.

3. Обозначим буквой R радиус шара, а буквами r и h – радиус и высоту конуса. Тогда объем конуса равен $V = \pi r^2 h/3$. Продолжив высоту конуса до пересечения с шаром, получим отрезок длиной $2R - h$. Таким образом, через одну точку (центр основания конуса) проходят две хорды: одна из них состоит из отрезков длиной h и $2R - h$, а другая – из двух отрезков длиной r каждый. Значит, $r^2 = h(2R-h)$, так что $V = \pi h^2(2R-h)/3$. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получим

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R-h) \le \left(\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2R-h}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}R^3,$$

где равенство достигается при $\frac{h}{2} = 2R - h$, т.е. при $h = \frac{4}{3}R$.

При такой высоте объем конуса и будет максимальным.

4. Пусть h и r – высота и радиус основания конуса, y и x – высота и радиус основания вписанного цилиндра. Тогда $\frac{x}{r}+\frac{y}{h}=1$ и объем цилиндра равен $V=\pi x^2 y=\pi x^2 h\left(1-\frac{x}{r}\right)$. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2 r-x^3$. Ее производная $f'(x)=2xr-3x^2$ обращается в ноль при $x=0$ или $x=\frac{2}{3}r$. Поскольку $f(0)=f(r)<=\frac{4}{27}r^3$, то объем цилиндра максимален при $x=\frac{2}{3}r$ и равен при этом $V=\frac{4\pi}{27}r^2h$.

5. а) По теореме Пифагора, $a^2+b^2=4r^2$, где a, b – длины сторон прямоугольника. Величина ab^2 наибольшая тогда же, когда и величина $a^2b^4=\left(4r^2-b^2\right)b^4=\left(4r^2-x\right)x^2$, где обозначено $x=b^2$. При положительных x функция $f(x)=\left(4r^2-x\right)x^2$ принимает наибольшее значение при $x=\frac{8}{3}r^2$. При этом $b=r\sqrt{8/3}$ и $a=2r/\sqrt{3}$.

б) В обозначениях пункта а) имеем $b/a=\sqrt{2}$.

6. 4. **7.** $2V/9$. **8.** От 0 до $2S/27$. **9.** $\pi/\left(6\sqrt{3}\right)$.

11. Если $h\le 2$, то $h\ge a>h\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$; если $h\ge 2$, то $h\ge a>h\sqrt[3]{1-\frac{3h^2}{(h+1)^3}}$.

12. а) Объем равен $\frac{a^3n}{6}\sin\varphi\cos^2\varphi\sin\frac{360^\circ}{n}$ и принимает наибольшее значение при $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Высота пирамиды равна $h=b\sin\varphi$, а радиус круга, вписанного в основание пирамиды, равен $r=b\cos\varphi$, где φ – угол между боковой гранью и основанием пирамиды. Объем максимален, когда максимальна величина $hr^2=b^3\sin\varphi\cos^2\varphi$, т.е. когда $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. $\varphi=2\arcsin\left(1/\sqrt{3}\right)$. *Указание.* Радиус описанной окружности равен $\frac{a}{2\sin\varphi\cos(\varphi/2)}=\frac{a}{4\sin\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}$. Замена $x=\sin\frac{\varphi}{2}$ сводит задачу к определению наибольшего значения функции $x\left(1-x^2\right)$ при условии $0<x<1$.

14. а) $a/6$. б) Нужно найти максимум функции $y=x(a-2x)(b-2x)$, где $0<x<\min(a,b)/2$. Производная этой функции равна $y'=ab-4(a+b)x+12x^2$ и обращается в ноль при $x=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. Поскольку $a^2-ab+b^2\ge\min(a,b)^2$, то вместо «$\pm$» следует брать знак «$-$».

15. а) $a=-p/3$; б) $p^2\ge 3q$; в) $p^2\le 3q$.

16. Обозначим буквами h, r, x, y высоту, радиус основания цилиндра и радиусы оснований усеченного конуса соответственно. Тогда

$$\pi r^2h=\pi\frac{x^2+xy+y^2}{3}h,\ \text{т.е.}\ 3r^2=x^2+xy+y^2.$$

По теореме Пифагора квадраты диаметров описанных шаров равны $4r^2+h^2$ и $(x+y)^2+h^2$, так что мы должны доказать неравенство $4r^2>x^2+2xy+y^2=3r^2+xy$, т.е. неравенство $r^2>xy$, которое равносильно неравенству $x^2+xy+y^2=3r^2>3xy$, т.е. $(x-y)^2>0$.

Как линейкой измерить длину волны лазерного излучения?

1. $a=F\lambda/\Delta x=0{,}6$ мм.

2. $L=\frac{a}{2\alpha(n-1)}=25$ м; $\Delta x=\frac{\lambda}{2\alpha(n-1)}=6\cdot 10^{-2}$ см; $N=\frac{a}{\Delta x}=42$.

3. $\Delta n/n=\lambda/L=5\cdot 10^{-6}$.

4. $m=\frac{2h\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{\lambda}=390$; $\Delta x=\frac{\lambda L\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{h\sin\varphi\cos^2\varphi}=2{,}8$ см.

Задачи о трапециях

1. 5; $\frac{5}{4}$. **2.** $\frac{2ab}{|a-b|}$. **3.** $\frac{1}{n+1}$. Построение, описанное в задаче, позволяет последовательно строить $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и т.д. часть исходного отрезка. **4.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **5.** 6; 2. **6.** 10. *Указание.* Докажите, что сумма площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции, равна площади пятиугольника. **7.** $\frac{48}{5}$. *Указание.* Продлите луч BE до пересечения с прямой AD. **8.** 25. **9.** $90\sqrt{3}$. **10.** bd. *Указание.* Проведите через середину отрезка BC прямую, параллельную DE, до пересечения с прямыми BE и CD. **11.** $\frac{(a-b)^3}{16(a+b)}$. **12.** 3 : 29. **13.** $\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$. **14.** 10. **15.** $\sqrt{ab}\left(a+b+c+\frac{ab}{c}\right)$.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. (4; 2); (–4; –2). *Указание.* Перемножьте уравнения $\frac{x^4}{y^2}=72-xy$, $\frac{y^4}{x^2}=9-xy$ и введите переменную $t=xy$.

2. $\pi/4+\pi n/2$, $n\in\mathbf{Z}$; $\pi k/10$, $k\in\mathbf{Z}$, k не кратно 5. *Указание.* Примените формулу

$$\frac{\sin^2 9x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 9x}{\cos^2 x}=\frac{4\sin 10x\sin 8x}{\sin^2 2x}.$$

3. $(0;1/4)\cup(1/4;1]\cup(4;16)$. *Указание.* Сделайте замену $t=\log_2 x$.

4. $16\sqrt{6}/25$. *Решение.* Углы DBE и DAE равны, так как они опираются на одну дугу DE (рис.4), обозначим их через α, тогда и $\angle ABF=\alpha$. Из подобия треугольников AKC и FBC (оба – прямоугольные и угол C – об-

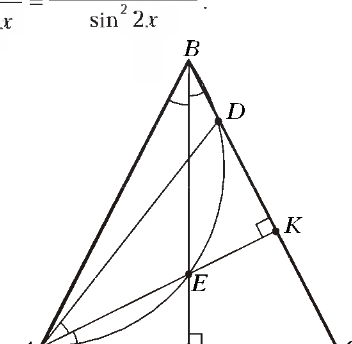


Рис. 4

щий) следует, что $\angle KAC = \angle FBC = \alpha$, $AC = AD = 2AF$. Пусть R − радиус окружности. Так как треугольник ABE вписан в окружность, то $R = AF/\sin 2\alpha$. Из подобия треугольников ABF и AKC имеем $AC/KC = AB/AF$, или $4AF^2 = BC\cdot CD$. Кроме того, $\sin\alpha = AF/BC$. Отсюда следует, что $CD = 16\sqrt{6}/25$.

5. $a > 0$, $a = -1/2$. *Указание.* Учитывая, что $x > 0$, $x \neq 1/2$, рассмотрите взаимное расположение семейства прямых $y = 1 - ax$, $a \in \boldsymbol{R}$, и ветви параболы $y = \sqrt{2x}$ (рис.5).

6. $V = 3\sqrt{11}/28$, $S = 20\sqrt{3}/21$. *Решение.* Так как пирамида $ABCD$ − правильная, то

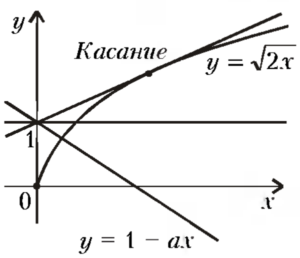


Рис. 5

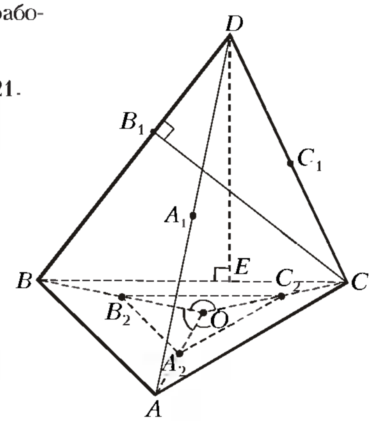


Рис. 6

$AB_1 \perp BD$, и угол между боковыми гранями $\alpha = \angle AB_1C = \arccos(1/10)$ (рис.6). Из треугольника AB_1C получаем

$$2AB_1^2(1-\cos\alpha) = AC^2, \text{ откуда } AB_1 = \sqrt{\frac{AC^2}{2-2\cos\alpha}} = 2\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$\sin\angle B_1BA = AB_1/AB = \sqrt{5}/3;$$
$$\cos\angle ADB = \cos(\pi - 2\angle B_1BA) = 1/9.$$

Обозначим $p = DA_1/DA$, $q = DB_1/DB$, $r = DC_1/DC = 1/2$. Пусть $\varphi = \angle BDE$, где DE − высота треугольника BCD; тогда $\sin\varphi = \sqrt{(1-\cos\angle ADB)/2} = 2/3$, $BD = BE/\sin\varphi = 9/2$. Треугольники BDE и BCB_1 подобны по двум углам, поэтому $BB_1 = (BE/BD)\cdot BC = 4$, $DB_1 = DB - BB_1 = 1/2$, $q = DB_1/DB = 1/9$.

По свойству биссектрисы $DA_1/AA_1 = BD/AB = 3/4$, откуда $p = DA_1/DA = 3/7$.

Пусть V_0 и V − объемы пирамид $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ соответственно. Так как площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = AB^2\sqrt{3}/4 = 9\sqrt{3}$, радиус описанной около треугольника ABC окружности $R = 2\sqrt{3}$, а высота пирамиды $DO = \sqrt{BD^2 - BO^2} = \sqrt{33}/2$, то $V_0 = (1/3)S_{ABC}\cdot DO = 9\sqrt{11}/2$, $V = pqrV_0 = 3\sqrt{11}/28$.

Если A_2, B_2, C_2 − проекции точек A_1, B_1, C_1 соответственно на плоскость ABC, то по теореме Фалеса $OA_2 = pR$, $OB_2 = qR$, $OC_2 = rR$; $\angle A_2OB_2 = \angle B_2OC_2 = \angle C_2OA_2 = 2\pi/3$. Искомая площадь проекции

$$S = \frac{1}{2}\sin(2\pi/3)\left(OA_2\cdot OB_2 + OB_2\cdot OC_2 + OC_2\cdot OA_1\right) =$$
$$= R^2\left(\sqrt{3}/4\right)(pq+qr+rp) = 20\sqrt{3}/21.$$

Вариант 2

1. $[1;2)\cup[2+\sqrt{3};6)$. *Указание.* Неравенство равносильно системе неравенств

$$x^2 - 7x + 6 \le 0,$$
$$\left(x^2-6x+5\right)^2 - \left(x^2-2x-3\right)^2 < 0.$$

2. πk, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pi/8 + \pi n/4$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Примените формулу

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta.$$

3. (2; 0), (43/4; 21/4). *Решение.* Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases} \left[\log_2(x+y) - \log_2(x-2y)\right]\times \\ \times\left[\log_2(x+y) + 2\log_2(x-2y)\right] = 0, & (1) \\ (x+y)(x-2y) = 4. & (2) \end{cases}$$

Из (1) следует, что либо

$$x + y = x - 2y, \qquad (3)$$

либо

$$(x+y)(x-2y)^2 = 1. \qquad (4)$$

Если

$$x+y > 0,\ x-2y > 0, \qquad (5)$$

то система (1), (2) равносильна совокупности систем (2), (3) и (2), (4).

Первая из этих систем имеет единственное решение (2; 0), удовлетворяющее условию (5), а вторая, равносильная системе $x - 2y = 1/4$, $x + y = 16$, имеет решение (43/4; 21/4), которое также удовлетворяет (5).

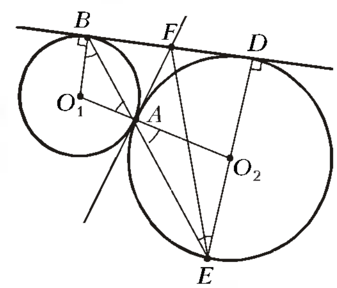


Рис. 7

4. $r_1 = 2\sqrt{5}$, $r_2 = \sqrt{5}/2$. *Решение.* $AF = BF = DF$ как касательные к окружности, проведенные из одной точки F. Пусть $AF = x$, $AB = y$, $AE = z$, $EF = d$; r_1 и r_2 − радиусы окружностей C_1 и C_2 (рис.7). Углы BAO_1 и EAO_2 равны как вертикальные; треугольники AO_1B и AO_2E равнобедренные ($AO_1 = O_1B = r_1$, $AO_2 = O_2E = r_2$), поэтому $\angle O_1BA = \angle O_2AE = \angle O_1AB$. Так как накрест лежащие углы при прямых O_1B и O_2E равны, то эти прямые параллельны; следовательно, из условия $O_1B \perp BD$ вытекает, что $O_2E \perp BD$ и DE − диаметр C_2, $DE = 2r_2$. Из трапеции O_1BDO_2 находим $BD = 2x = 2\sqrt{r_1r_2}$. Из подобия треугольников AO_1B и AO_2E следует, что $r_1/r_2 = y/z$. Из треугольника BDE получаем $(y+z)^2 = 4x^2 + 4r_2^2$. Из треугольника EFD имеем $d^2 = x^2 + 4r_2^2$. Подставляя в полученную систему $y = 4$, $d = \sqrt{10}$, находим r_1 и r_2.

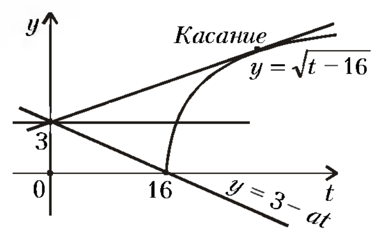


Рис. 8

5. $a \in [0; 3/16]$, $a = -1/16$. *Указание.* Сделав замену $t = x + 7$, рассмотрите взаимное расположение семейства прямых $y = 3 - at$, $a \in \boldsymbol{R}$, и ветви параболы $y = \sqrt{t-16}$ (рис.8).

6. $DC_1/DC = 5/11$, $DA_1/DA = DB_1/DB = 5/6$, $S = 25\sqrt{23}/99$, $\rho = 7/8$. *Решение.* Пусть точки A_1, B_1, C_1 − точки пересечения плоскости P с лучами DA, DB, DC соответственно, $L = DK \cap A_1B_1$ (рис. 9).

Так как $A_1B_1 \perp CM$, а прямая KM − проекция CM на плоскость ABD (плоскости ABD и KDC перпендикулярны), то по теореме о трех перпендикулярах $A_1B_1 \perp KM$; с учетом того, что $AB \perp KM$, получаем $A_1B_1 \parallel AB$. Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ − равнобедренный ($A_1C_1 = B_1C_1$).

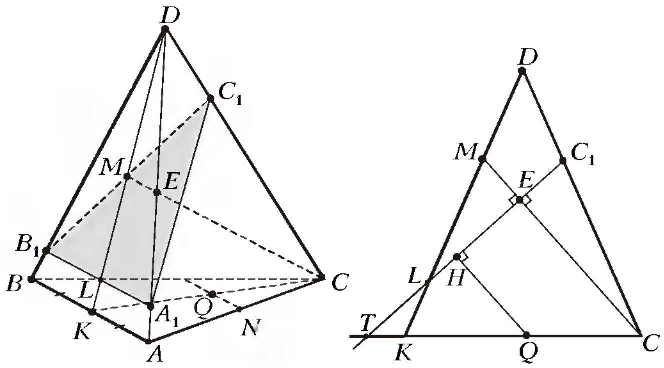


Рис. 9

Пусть $\alpha = \angle ADB/2$, тогда $\sin\alpha = 1/3$, $DC = AC/2\sin\alpha = 3$, $KC = \sqrt{3}$, $DK = \sqrt{DA^2 - (1/4)AB^2} = 2\sqrt{2}$, $KM = MD = \sqrt{2}$,

$$\cos\angle CDK = \frac{DC^2 + DK^2 - KC^2}{2DC\cdot DK} = \frac{7}{6\sqrt{2}},$$

$$MC = \sqrt{DC^2 + DM^2 - 2DC\cdot DM\cos\angle CDK} = 2,$$

$$ME = MC/4 = 1/2,\ CE = (3/4)MC = 3/2,$$

$$\cos\angle DCM = \frac{DC^2 + CM^2 - DM^2}{2DC\cdot CM} = 11/12.$$

Из треугольника CC_1E ($\angle E = \pi/2$) находим $CC_1 = EC/\cos\angle DCM = 18/11$, $DC_1 = DC - CC_1 = 15/11$,

$$\cos\angle KMC = \frac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2KM\cdot MC} = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника MLE имеем $LM = ME/\cos\angle KMC = 2\sqrt{2}/3$. Отсюда $DL = DM + LM = 5\sqrt{2}/3$ и из подобия треугольников ADB и A_1DB_1 следует, что $DL/DK = 5/6 = DA_1/DA = A_1B_1/AB$, $DA_1 = 5/2$, $A_1B_1 = 5/3$. Так как $\cos 2\alpha = 7/9$, то

$$A_1C_1^2 = DA_1^2 + DC_1^2 - 2DA_1\cdot DC_1\cos 2\alpha = \frac{5^2}{2^2 11^2}\cdot\frac{163}{3},$$

$$C_1L = \sqrt{A_1C_1^2 - (1/4)A_1B_1^2} = 10\sqrt{23}/33.$$

Искомая площадь $S = C_1L\cdot A_1B_1/2 = 25\sqrt{23}/99$.
Проведем прямую через точку N параллельно A_1B_1, она пересечет отрезок KC в точке Q, $KQ = QC$,

$$\cos\angle KCM = \frac{KC^2 + MC^2 - MK^2}{2KC\cdot MC} = \frac{5}{4\sqrt{3}}.$$

Из треугольника TEC ($\angle E = \pi/2$) находим $TC = CE/\cos\angle KCM = 6\sqrt{3}/5$. Пусть QH – перпендикуляр, опущенный из точки Q на прямую C_1L. Так как он лежит в плоскости KDC, перпендикулярной сечению, то длина ρ отрезка QH – искомая. Из подобия треугольников TEC и THQ получаем $QH/CE = TQ/TC = (TC - QC)/TC = 7/12$, $\rho = 7CE/12 = 7/8$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. При скольжении монеты по наклонной плоскости от точки C до точки D на нее вдоль наклонной плоскости действовала постоянная по величине сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu Mg\cos\alpha,$$

где M – масса монеты, а g – ускорение свободного падения. Направлена эта сила противоположно скорости монеты. Работа силы трения скольжения уменьшает кинетическую энергию монеты, и на пути s эта работа равна

$$A_{\text{тр}} = \mu Mgs\cos\alpha.$$

Обозначим скорость монеты в точке D через v. По закону сохранения энергии для точек C и D можно записать

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + MgH + \mu Mgs\cos\alpha.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g(H + \mu s\cos\alpha)}.$$

2. Пусть максимальная длина налитого слоя ртути равна x. Начальное состояние запертого воздуха таково: объем $V_1 = LS$, где S – площадь внутреннего сечения трубки, а давление $p_1 = p_0 + \rho gL$, где ρ – плотность ртути. После доливания ртути объем запертого воздуха стал $V_2 = (2L - x)S$, а давление стало $p_2 = p_0 + \rho g(L + x)$. Поскольку температура запертого воздуха остается неизменной,

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

или

$$(L_0 + L)L = (L_0 + L + x)(2L - x),$$

где L_0 – длина столбика ртути, соответствующая атмосферному давлению. Полученное квадратное уравнение относительно x позволяет определить максимальную длину налитого слоя ртути:

$x = 350$ мм.

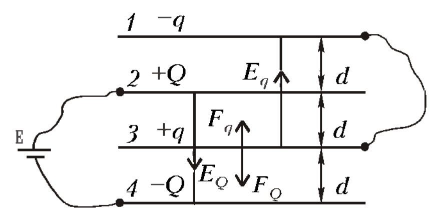


Рис. 10

3. До закорачивания пластин *1* и *3* и подключения батареи к пластинам *2* и *4* все пластины были не заряжены. После закорачивания пластин и подключения батареи в результате электростатической индукции на пластинах появятся заряды: $\mp q$ на пластинах *1* и *3* и $\pm Q$ на пластинах *2* и *4* (рис.10). Запишем условие эквипотенциальности пластин *1* и *3*:

$$E_q\cdot 2d - E_Qd = 0.$$

Отсюда, поскольку

$$E_q = \frac{q}{\varepsilon_0 S}\ \text{и}\ E_Q = \frac{Q}{\varepsilon_0 S},$$

следует, что

$$2q - Q = 0.$$

Условие поддержания на пластинах *2* и *4* разности потенциалов $\mathcal{E}$ позволяет получить второе уравнение для зарядов:

$$E_Q\cdot 2d - E_qd = \mathcal{E},$$

или

$$2Q - q = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}.$$

Решая совместно два уравнения для зарядов, получим

$$q = \frac{\varepsilon_0 S}{3d}\mathcal{E}\ \text{и}\ Q = \frac{2\varepsilon_0 S}{3d}\mathcal{E}.$$

На пластину *3* будут действовать две силы: сила F_Q со стороны электрического поля E_Q и сила F_q как результат взаимодействия пластины *3* с пластиной *1*. Эти силы равны, соответственно,

$$F_Q = qE_Q = \frac{2\varepsilon_0 S}{9d^2}\mathcal{E}^2\ \text{и}\ F_q = \frac{1}{2}qE_q = \frac{\varepsilon_0 S}{18d^2}\mathcal{E}^2.$$

Результирующая сила, действующая на пластину *3*, равна

$$F_3 = F_Q - F_q = \frac{\varepsilon_0 S}{6d^2}\mathcal{E}^2.$$

4. Рассмотрим прохождение луча света через клин с показателем преломления n_1 (рис.11). Угол преломления β связан

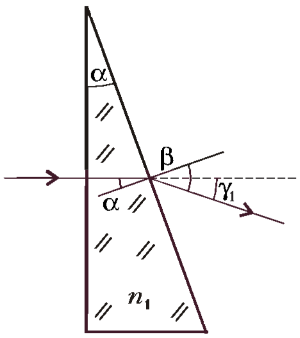


Рис. 11

с углом падения α соотношением $\sin\beta/\sin\alpha = n_1$. Для малых углов можно записать: $\beta = n_1\alpha$. Угол отклонения падающего луча после прохождения клина равен $\gamma_1 = \beta - \alpha = \alpha(n_1 - 1)$. Очевидно, что весь пучок отклонится после прохождения этого клина на угол γ_1. Для второго клина угол отклонения равен $\gamma_2 = -\alpha(n_2 - 1)$ соответственно. Знак «минус» означает отклонение от горизонтали вверх. Общее отклонение пучка после прохождения двух клиньев составляет

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = -\alpha(n_2 - n_1).$$

Поскольку $n_2 > n_1$, пучок света отклонится вверх, и на экране будет наблюдаться светлая точка на расстоянии

$$l = \alpha(n_2 - n_1)F \approx 10{,}5 \text{ мм}$$

от центра экрана (рис.12). Если убрать пластинку, то светлая точка будет наблюдаться в центре экрана. Следовательно, смещение светлой точки будет

$$l \approx 10{,}5 \text{ мм}.$$

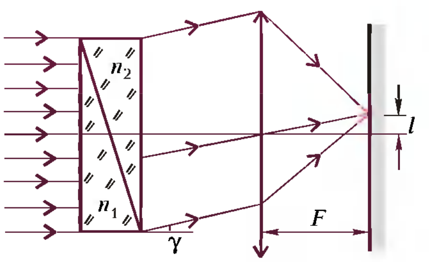


Рис. 12

5. При быстром изменении индуктивности катушки L сохраняется магнитный поток Φ, пронизывающий катушку. Если через катушку течет ток I, энергия магнитного поля катушки равна

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Изменение индуктивности в этот момент на ΔL ($\Delta L > 0$) приводит к изменению энергии, запасенной в контуре, на

$$-\frac{\Phi^2}{2L^2}\Delta L = -\frac{I^2}{2}\Delta L.$$

В нашем случае при максимальном токе I_0 в катушке происходит уменьшение индуктивности, и, следовательно, в контур закачивается энергия

$$\Delta W_L = \frac{I_0^2}{2}\Delta L.$$

Это происходит через каждые полпериода колебаний тока в контуре, т.е. через $\tau = T/2 = \pi\sqrt{LC}$. При нулевых значениях тока в контуре возвращение индуктивности к прежнему значению не изменяет энергии катушки. За время τ в контуре происходят тепловые потери на резисторе, равные

$$\Delta W_R = \frac{I_0^2}{2}R\tau = \frac{\pi\sqrt{LC}}{2}I_0^2R.$$

Условие поддержания незатухающих колебаний имеет вид

$$\Delta W_L \geq \Delta W_R.$$

Отсюда получаем

$$\Delta L \geq \pi R\sqrt{LC} \approx 9{,}4\cdot10^{-3} \text{ Гн}.$$

Вариант 2

1. 1) $v_1 = v/3$; 2) $\tau = \pi\sqrt{2m/(3k)}$.

2. $V = \dfrac{kS\Delta H\rho_в}{(k-1)(\rho-\rho_в)}$.

3. $A_{31} = 3A_{23} - 3A_{12}/2$.

4. 1) $I_0 = (\mathcal{E} - U_0)/R = 5\cdot10^{-3}$ А;

2) $q = C(\mathcal{E} - U_0) = 5\cdot10^{-4}$ Кл;

3) $Q = C(\mathcal{E} - U_0)^2/2 = 12{,}5\cdot10^{-4}$ Дж.

5. $F_2 = 12$ см.

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $\frac{5}{6}$; б) $\left(-\frac{3}{4}; 6\right)$; в) $\pi + \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$, $\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. а) $\frac{180}{13}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{3\sqrt{65}}{2}$. *Указание.* $\angle C = \frac{\pi}{2}$.

3. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $S_{A_1BD} = 12$, $d = \frac{2}{3}\sqrt{10}$. *Указание.* Пусть плоскость B_1CD_1 пересекает продолжения ребер AB, AD и AA_1 в точках K, L, M. Пирамиды с общей вершиной A и основаниями A_1BD и KLM гомотетичны с коэффициентом 2. Расстояние между основаниями пирамид равно разности их высот, опущенных из вершины A.

5. $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup [-1; +\infty)$. *Указание.* Пусть $u = \sin x$. Тогда первое уравнение имеет единственный корень $u = \frac{1}{2}$, а второе сводится к уравнению

$$2(a+2)u^2 + au - a - 1 = 0$$

с ограничением $u \in (0; 1]$. При $a = -2$ уравнения равносильны. При $a \neq -2$ уравнение имеет корни $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{a+1}{a+2}$. Тогда равносильность имеет место либо при $u_2 = \frac{1}{2}$ (что дает $a = -\frac{4}{3}$), либо при $u_2 \leq 0$ или $u_2 > 0$ (что дает $a \in (-\infty; 2) \cup \left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [-1; +\infty)$).

Вариант 2

1. $(-1; 2) \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

2. $\left(\frac{1}{13}; \frac{1}{4}\right) \cup (2; +\infty)$. *Указание.* $26x^2 + 11x - 1 = (2x+1)(13x-1)$.

3. $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \pi n + 2\pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

Указание. Из первого уравнения получаем

$$\operatorname{tg} x = 2 \text{ или } \operatorname{tg} x = -\frac{1}{5}.$$

Из третьего уравнения имеем

$$y_1 = x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad y_2 = y_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Второе уравнение преобразуем к виду

$$11\cos 2y - 10\sin 2y + 5 = 0.$$

Подставим в него выражения для y и выразим левую часть через $\operatorname{tg} x$. Убедимся, что этому уравнению удовлетворяет лишь $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{5}$ и y_1.

4. 360; 9:55. *Указание.* Отрезок MN параллелен биссектрисе CK угла BCA. Пирамида с основанием AMN гомотетична пирамиде $SACK$.

5. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть u – абсцисса точки касания. Уравнение перпендикуляра имеет вид

$$y-u^2=-\frac{1}{2u}(x-u).$$

Координаты точки Q находим из системы уравнений

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=-\frac{1}{2u}x+\frac{1}{2}+u^2. \end{cases}$$

Имеем

$$Q=\left(-u-\frac{1}{2u};\ u^2+\frac{1}{4u^2}+1\right).$$

Но тогда

$$PQ^2=\left(2u+\frac{1}{2u}\right)^2+\left(1+\frac{1}{4u^2}\right)^2=\frac{\left(4u^2+1\right)^3}{16u^4},$$

а производная этой функции равна

$$\frac{\left(4u^2+1\right)^2\left(2u^2-1\right)}{4u^5}.$$

ФИЗИКА

1. $F_{н1}/F_{н2}=2$. **2.** $v_к=v_0/\sqrt{2}$.

3. $h=\frac{p_а}{\rho_в g}\left(1{,}2\frac{T_1}{T_2}-1\right)=1{,}6$ м. **4.** $A=R\left(T_2+T_4-2\sqrt{T_2T_4}\right)$.

5. $m_в=m-p_н MV/(RT)=14{,}2$ г, где $p_н=10^5$ Па, М = 18 г/моль.

6. $A=4\pi\varepsilon_0E^2a^3$. **7.** $W=C_1C_2U^2/\left(2\left(C_1+C_2\right)\right)=2{,}7$ мДж.

8. $\eta=1-IU/P=0{,}8=80\%$.

9. $C=\lambda^2(\Delta I/\Delta t)/\left(4\pi^2c^2\mathrm{E}\right)=6{,}4$ пФ, где $c=3\cdot10^8$ м/с.

10. $F=2d(a-d)/a=8{,}4$ см.

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 6 ч 40 мин. **2.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Дробь в левой части равенства можно сократить.

3. $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$. *Указание.* При $x>0$

$$3\cdot2^{\frac{1}{x}}+4>4\Rightarrow\log_4\left(3\cdot2^{\frac{1}{x}}+4\right)>1.$$

4. –78. *Указание.* Исследуйте данную функцию по отдельности на участках знакопостоянства трехчлена $6+x-x^2$.

5. $\frac{50}{9\sqrt{3}}$. *Указание.* Сечение подобно параллельной ему боковой грани с коэффициентом подобия $\frac{5}{6}$.

Вариант 2

1. 10 ч. **2.** $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right)$.

4. –35,25. **5.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{5}$.

Вариант 3

1. $\frac{d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$. **2.** $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** 2.

4. $\{-1\}\cup[2;+\infty)$. *Указание.* Рассмотрите два случая: $x^2-x-2>0$ и $x^2-x-2=0$.

5. Локальный максимум $f(1)=0$, минимум $f(3)=4$.

Вариант 4

1. 450. *Указание.* Отрежьте от трапеции параллелограмм так, чтобы остался треугольник; найдите его площадь и высоту.

2. $\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Выразите $\sin^2x$ через $\cos2x$; получившиеся две серии решений объедините в одну.

3. $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$. **4.** 1; 2.

5. Максимум $y(-2)=-4$, минимум $y(0)=0$.

Задачи устного экзамена

1. $[-25;3]$. *Указание.* Первое неравенство сводится к $3^{x-3}>2^{2x-6}$, т.е. к $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-3}<1$.

2. –2; 0. **3.** $(-\infty;0]\cup[6;+\infty)$.

4. $\frac{1}{2}$. *Указание.* Рассмотрите случаи $q<0$, $q=0$, $q>0$.

5. $(-4;12)$. *Указание.* Для абсциссы $x_0=q-1$ вершины параболы $y=-x^2+2(q-1)x+(3q-13)$ рассмотрите случаи $x_0\le-1$ и $x_0>-1$.

6. $\frac{14}{5}$. *Указание.* Обозначив $a=\lg x$, $b=\lg y$ и перейдя в данном равенстве к логарифмам по основанию 10, найдите связь между a и b. Разумеется, при этом $x>0$, $x\ne1$, $y>0$, $y\ne1$, $y^2x^{-1}\ne1$.

7. 24,75. *Указание.* Убедившись, что уравнение имеет два корня, выразите $x_1^4x_2+x_1x_2^4$ через p и q, где $p=-\left(x_1+x_2\right)=1{,}5$, $q=x_1x_2=-2$.

8. 2,5. *Указание.* Упростив числитель и знаменатель дроби, сократите её.

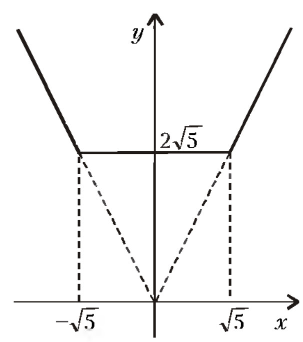


Рис. 13

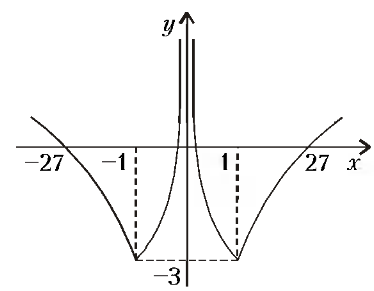


Рис. 14

9. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

10. 6.

11, 12, 13. См. рис.13, 14, 15.

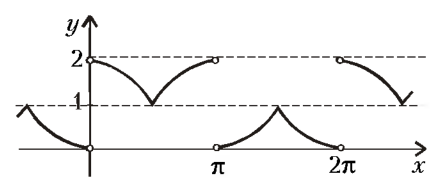


Рис. 15

14. 13,5.

15. $4\sqrt{\frac{16}{\pi}+9\pi}$.

ФИЗИКА

1. 100 кг. **2.** 55°. **3.** 533 Н; 8000 Дж.

4. 9 Н. **5.** 133 Дж. **6.** 93%.

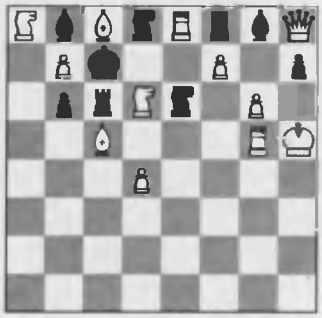
7. 0,8. **8.** 1 мкФ. **9.** 0,72. **10.** $2\cdot10^6$ м/с.

НАПЕЧАТАНО В 2000 ГОДУ

НАПЕЧАТАНО В 2000 ГОДУ

МашинА времени- II

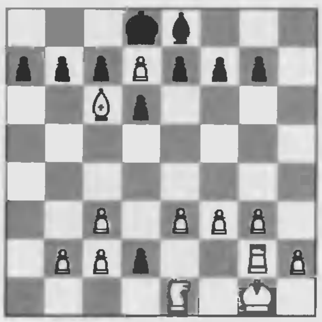
Первые ретрокомпозиции появились в середине XIX века, а расцвета этот жанр достиг сто лет спустя. У нас корифеем в этой области был тогда гроссмейстер по композиции В.Корольков. А современным классиком ретроанализа является Н.Плаксин. Вот одно из их совместных произведений.



В.Корольков, Н.Плаксин, 1970

Мат?

Последние ходы были такие (запись в ретронотации): 1. a7-a8♘× ♔d7-c7 2. c7-c8♗+ ♔e7-d7 3. d7:e8♖+ ♔f6-e7 4. g7:h8♕+, и позиция «развязана». Как видим, ее легальность доказывается превращением белых пешек подряд в ферзя, ладью, слона и коня – редчайший случай! Итак, все правильно, на доске действительно мат.



Н.Плаксин, 1981

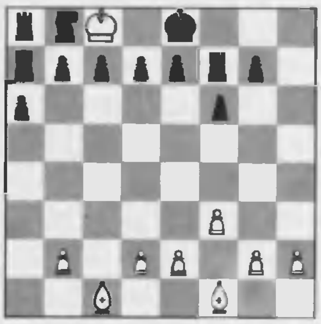
Мат в 1 ход

Решить одноходовку несложно – de♕×. Осталось только разобраться, кто именно матует: белая пешка берет на e8 или черная – на e1? Предположим, что белая. Тогда последний ход черных был или ♔c8-d8, или d3-d2. В случае ♔d8 белые предыдущим ходом объявляли шах – e6:d7+. Но возможно ли это? Проверим баланс черных фигур. Десять из них стоят на доске. Пять взяла белая пешка a2, чтобы добраться до d7-a2:b3:c4:d5:e6:d7+. Одну черную фигуру взяла белая пешка «d» – d2:c3. И, наконец, черный чернопольный слон погиб на родном поле f8, так как черные пешки g7 и e7 занимают исходные места.

Подведем итог: 10 + 5 + 1 + 1 = 17. Многовато! В начале партии у каждой стороны только по 16 боевых единиц. Итак, ретробухгалтерия отвергает возможность последнего хода черных королем на d8.

А могли ли они пойти пешкой – d3-d2? Ведь баланс белых фигур сходится: 12 на доске и четыре взяла черная пешка «h» – h7:g6:f5:e4:d3, итого 12 + 4 = 16. А какие фигуры она взяла? Разумеется, те, которые отсутствуют: ферзя, ладью, коня и чернопольного слона. Но такой слон не мог быть взят на белопольной диагонали. Итак, правило цветности отвергает и ход черных пешкой «d».

Остается сделать вывод, что последними ходили белые, и теорема доказана: мат объявляют черные – **d2:e1♕!**



В.Корольков, А.Троицкий, 1957

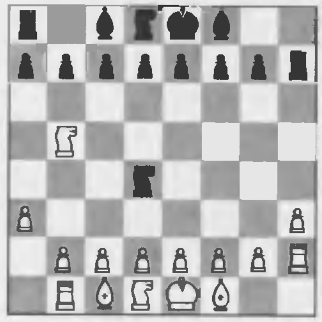
Возможна ли позиция?

В третью черную ладью превратилась пешка h7. Ее маршрут – h7:g:f:e:d:c:b1♖. По пути было взято шесть белых фигур, и, значит, пешка «a» предварительно превращалась – a:b:a7-a8♕. С учетом черных слонов, погибших на c8 и f8, в ретробалансе остается неучтенной только седьмая недостающая фигура белых – ладья h1. Пока вернем ее на доску.

Дальнейшее исследование прошлого позиции таково: одна черная ладья забирается на a7, вторая становится рядом с ней на a8. Затем конь приходит на b8, белый король – на c8 и черный – на e8. Финальный маневр: третья черная ладья проникает на f7.

После прибытия черного короля на e8 белые могут ходить только оставшейся ладьей – ♖h1-g1-h1. В ретронотации все это выглядит наоборот: 1... ♔e8 2. ♔c8 ♔f8 3. ♔d8 ♔g8 4. ♔c8 ♔h7 5. ♔d8 ♔g6 6. ♔c8 ♔f5 7. ♔d8 ♔e5 8. ♔c8 ♔d4 9. ♔d8 ♔c4 10. ♔c8 ♔b3. 11. ♔d8 ♔c2. 12. ♔c8 ♔d1 13. ♔d8 ♔e1 14. ♔c8 ♔f2 15. ♔d8 ♔:g1 16. ♖g1 ♔f2 17. ♖h1 ♔e1 18. ♖g1 ♔d1 19. ♖h1 ♔c2 20. ♖g1 ♔b3 21. ♖h1 ♔c4 22. ♖g1 ♔d4 23. ♖h1 ♔e5 24. ♖g1 ♔f5 25. ♖h1 ♔g6 26. ♖g1 ♔h7 27. ♖h1 ♔g8 28. ♖g1 ♔f8.

Получилась почти копия исходной позиции. Предыдущее просто: 29. ♖g1-h1 ♖f8-f7 30. ♖h1-g1 ♖h8-f8 31. ♖g1-h1 ♔f8-e8 32. ♔d8-c8, и позиция развязана.



В.Корольков, 1960

Игрок взялся за коня d4, какой ход он сделает?

Эта задача иллюстрирует один из популярных сюжетов в ретрокомпозиции, называемый «чет-нечет». Как будто, сомнений нет: черные объявляют мат – ♘d4:c2×. Но не будем спешить с ответом, выясним сначала, чей сейчас ход.

Обратим внимание на одну особенность шахматной партии. Пусть, скажем, она начата ходами 1. e2-e4 e7-e5. Каждая из сторон сделала нечетное число ходов – по одному (нечет). После 2. ♘g1-f3 у белых четное число ходов (чет), а у черных – нечетное (нечет). Ответ ♘b8-c6 – чет у белых и у черных. Закон прост: при совпадении четностей ход белых, при несовпадении – черных.

С этой точки зрения и подойдем к анализу. Установим, сколько ходов в ней сделали белые. Хотя в распоряжении каждой из ладей по три поля, у них по нечетному числу ходов (1, 3, 5...). Слоны и ферзь не двигались с места (ферзь был взят черным конем), 0 ходов – чет. Король e1 – чет (0, 2, 4...). Крайние пешки продвинулись на одно поле, каждая – нечет.

Осталось разобраться с конями. В начале игры они стоят на полях разного цвета, и каждым ходом конь меняет цвет поля. Значит, при конях на полях разного цвета (как в исходном положении) общее число их ходов – четное, а на полях одинакового цвета – нечетное. В данном случае оба коня занимают белые поля – нечет. В итоге получаем: чет ладей + чет короля + чет ферзя + чет слонов + чет пешек + нечет коней = нечет ходов всех белых фигур.

Проделав аналогичный расчет для черных, тоже получаем нечет. Четности совпали – сейчас ход белых. Поскольку они взялись за коня d4, то должны сделать «неожиданный» ход ♘b5:d4.

Е.Гик

Индекс 70465 53-12

Физики на монетах мира

Имена изобретателей радио – АЛЕКСАНДРА ПОПОВА и ГУЛЬЕЛЬМО МАРКОНИ – хорошо известны коллекционерам монет и банкнот.

Портрет А.С.Попова представлен на памятной монете СССР номиналом в 1 рубль выпуска 1984 года.

Г.Маркони изображен на итальянских монетах номиналами в 100 лир и в 500 лир, выпущенных к столетию со дня рождения ученого в 1974 году, а также на монете Республики Сан-Марино номиналом в 100 лир, выпущенной в 1984 году. Кроме того, портрет Маркони изображен на лицевой стороне итальянской банкноты достоинством в 2000 лир. На ее оборотной стороне представлены элементы устройств для приема и передачи электромагнитных волн.

(Подробнее об изобретении радиосвязи и о судьбе ее изобретателей – внутри журнала.)